Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 288
69120 Heidelberg

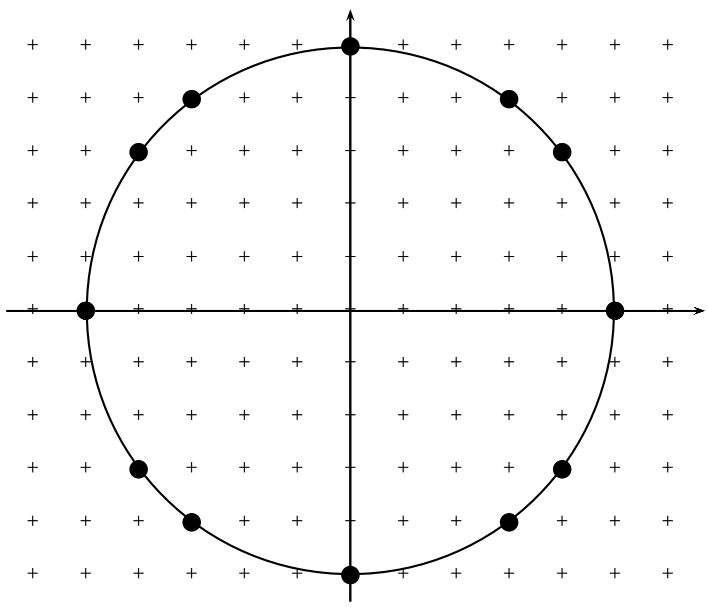
Lorenz Milla
Kirchstr. 62
69221 Dossenheim

Diplomarbeit

Anzahlformeln für Summen von Quadraten

nach Glaisher und Rademacher

$$A_k(n) := \#\left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \,\middle|\, x_1^2 + \ldots + x_k^2 = n \right\}$$



September 2010, mit einem Nachtrag (Kap. 1.7) von Dezember 2011

Betreut durch Dr. Rolf Busam

"The theory of elliptic functions is the fairyland of mathematics.
The mathematician who once gazes upon this enchanting and wondrous domain
crowded with the most beautiful relations and concepts is forever captivated."
– Richard Bellman, 1961

Inhaltsverzeichnis

0 Überblick

Ziel dieser Diplomarbeit ist die Herleitung von zehn Formeln, welche angeben, wie viele Möglichkeiten es gibt, eine natürliche Zahl n als Summe von k Quadraten ganzer Zahlen zu schreiben, wobei für jede *gerade* Zahl k zwischen 2 und 20 eine Formel angegeben wird:

$$A_k(n) := \# \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \middle| x_1^2 + \ldots + x_k^2 = n \right\}, n \in \mathbb{N}, k \in \{2, 4, \ldots, 18, 20\}$$

Hierbei ist die Anzahlformel $A_k(n)$ der Koeffizient vor q^n in der q-Entwicklung von ϑ_3^k:

$$\vartheta_3^k = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \right)^k = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}} q^{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n) q^n$$

Rademacher [Rad] behandelte die Frage bis $k = 12$, Glaisher [Gla7] bis $k = 18$, die Formeln für $k = 20$ sind neu.

In Kapitel 1 (Grundlagen) gehen wir auf die Theorie der ϑ-Funktionen ein. Die Fragestellung der ϑ-Funktionen wird auf die f_α zurückgeführt.

Kapitel 2 (Linearkombinationen) ist ein sehr technisches Kapitel. Es werden die ϑ_3^{2k}-Potenzen als Linearkombinationen der Ableitungen der f_α dargestellt.

In Kapitel 3 werden nun die Lambert-Reihen (q-Entwicklungen) dieser Ableitungen berechnet.

In Kapitel 4 können hiermit die Formeln $A_k(n)$ für zwei bis acht Quadrate berechnet werden, dargestellt lediglich durch die Teiler von n.

Für zehn und mehr Quadrate ist dies nicht möglich, weil bei mehr als $8z$ Quadraten ($z \in \mathbb{N}$) noch z Spitzenformen hinzukommen. Um diese auch noch berechnen zu können, werden in Kapitel 5 explizite Formeln für diese Restglieder hergeleitet. Einen Überblick über die Restterme und ihre Benennung findet sich auf der nächsten Seite.

In Kap. 6 bis 10 werden nun die Anzahlformeln mit Hilfe der Vorergebnisse berechnet.

Die Ergebnisse – Formeln und Werte – finden sich auf Seite 89.

Kapitel 1, 3 und 4 orientieren sich am Buch von Hans Rademacher, [Rad]. Für Kapitel 2 konnte ich keine Literatur finden und musste die Ergebnisse selbst berechnen. Kapitel 5 basiert auf Publikationen von James Whitbread Lee Glaisher, siehe [Gla8] und [Gla9]. In Kapitel 6 bis 9 werden die Methoden von J. W. L. Glaisher verwendet (vor allem [Gla4],[Gla5],[Gla6]), aber in der heute üblichen Notation. Kapitel 10 ist eine Erweiterung auf zwanzig Quadrate, die ich selbst vorgenommen habe.

Glaisher fasste seine Ergebnisse zu diesem Thema in [Gla7] zusammen.

Nun ein Überblick über die Restterme (welche sich nicht durch die Teiler von n ausdrücken lassen):

- Zehn Quadrate: $\chi_4(n)$ wird mit Hilfe der Lösungen von $a^2 + b^2 = n$ berechnet, also der Darstellungen von n als Summe von *zwei* Quadraten.
- Zwölf Quadrate: $\Omega(n)$ wird mit Hilfe der Darstellungen von n als Summe von *vier* Quadraten berechnet.
- 14 Quadrate: $W(n)$ kann mit Hilfe der Darstellungen von n als Summe von *sechs* Quadraten berechnet werden. Weil das aber zu lange zu berechnen braucht, wird eine rekursive Formel angegeben.
- 16 Quadrate: $\Theta(n)$ wird mit Hilfe der Darstellungen von n als Summe von *vier* Quadraten berechnet.
- 18 Quadrate: $\chi_8(n)$ wird mit Hilfe der Darstellungen von n als Summe von *zwei* Quadraten berechnet. $G(n)$ kann mit Hilfe der Darstellungen von n als Summe von *sechs* Quadraten berechnet werden. Weil das aber, wie bei $W(n)$, zu lange zu berechnen braucht, wird eine rekursive Formel angegeben.
- 20 Quadrate: $\chi_8^*(n)$ und $L(n)$ werden mit Hilfe der Darstellungen von n als Summe von *vier* Quadraten berechnet.
- $22 - 40$ Quadrate: Um die Komplexität der Restglieder zu berechnen, müssen Linearkombinationen vom Typ (5.19) gefunden werden. Ich habe mit Hilfe von MuPAD (ein Computer-Algebra-System) alle Linearkombinationen, die man bis 40 Quadrate verwenden kann, berechnet – die resultierende Mindestkomplexität der Restglieder findet sich in Tabelle 0.1. Man kann also die Restglieder nur für 28 und 40 Quadrate mit Hilfe der Vier-Quadrate-Darstellungen berechnen (sonst sechs oder gar acht), allerdings werden die Vorfaktoren sehr groß, daher verzichte ich auf die Herleitung dieser Formeln.

Tabelle 0.1: Komplexität der Restglieder bis 40 Quadrate (ohne Beweis)

10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
2	4	6	4	6	4	6	8	6	4	6	8	6	8	6	4
				2	4	6	4	6	4	6	4	6	8	6	4
								2	4	6	4	6	8	6	4
												2	4	6	4

1 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die ϑ-Funktionen eingeführt und einige Eigenschaften, die wir alle später verwenden werden, bewiesen. Dann werden mit Hilfe der ϑ-Funktionen die f_α definiert.

1.1 Definition der ϑ-Funktionen

In der Schreibweise von Tannery und Molk definieren wir folgende vier ϑ-Funktionen, wobei $q = e^{\pi i \tau}$ ist mit $|q| < 1$, d.h. $\tau \in \mathbb{H}$:

$$\vartheta_1(v|\tau) = -i \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)\pi i v} \tag{1.1a}$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)\pi i v} \tag{1.1b}$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} e^{2\pi i n v} \tag{1.1c}$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i n v} \tag{1.1d}$$

Es handelt sich für festes $\tau \in \mathbb{H}$ um ganze Funktionen bezüglich v; das τ wird nur in die Funktion mit hineingeschrieben, dass klar ist, was die zweite Quasiperiode ist. Später werden wir auch manchmal dieses zweite Argument variieren.

Man kann auch jeweils positives und negatives n in der Summation zusammenfassen:

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{(m+1/2)^2} \sin(2m+1)\pi v \tag{1.2a}$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} q^{(m+1/2)^2} \cos(2m+1)\pi v \tag{1.2b}$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2m\pi v \tag{1.2c}$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2m\pi v \tag{1.2d}$$

1.2 Relationen zwischen ϑ-Funktionen

Den definierenden Gleichungen (1.1) lesen wir das Transformationsverhalten bezüglich der Quasiperioden 1 und τ ab:

$$\vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v), \qquad \vartheta_1(v+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi iv}\vartheta_1(v) \tag{1.3a}$$

$$\vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2(v), \qquad \vartheta_2(v+\tau) = q^{-1}e^{-2\pi iv}\vartheta_2(v) \tag{1.3b}$$

$$\vartheta_3(v+1) = \vartheta_3(v), \qquad \vartheta_3(v+\tau) = q^{-1}e^{-2\pi iv}\vartheta_3(v) \tag{1.3c}$$

$$\vartheta_4(v+1) = \vartheta_4(v), \qquad \vartheta_4(v+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi iv}\vartheta_4(v) \tag{1.3d}$$

Ebenfalls mit (1.1) berechnen wir einige Beziehungen zwischen den verschiedenen ϑ-Funktionen:

$$\begin{aligned}
q^{1/4}e^{\pi iv}\vartheta_3\left(v+\tau/2|\tau\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+1/4}e^{2\pi in(v+\tau/2)+\pi iv} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2+n+1/4}e^{\pi i(2n+1)v} = \vartheta_2(v|\tau) \\
\vartheta_3(v+1/2|\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}e^{2\pi in(v+1/2)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}e^{2\pi inv}(-1)^n = \vartheta_4(v|\tau) \\
\vartheta_2(v+1/2|\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2}e^{(2n+1)\pi i(v+1/2)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2}e^{(2n+1)\pi iv}\cdot(-1)^n\cdot i = -\vartheta_1(v|\tau)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Nun schreiben wir mit Hilfe von $B := q^{-1/4}e^{-\pi iv}$ eine Tabelle aller solcher Relationen. Sie können genauso wie (1.3) und (1.4) hergeleitet werden.

$$\begin{array}{c|rrr}
 & v+\frac{1}{2} & v+\frac{\tau}{2} & v+\frac{1+\tau}{2} \\
\hline
\vartheta_1 & \vartheta_2(v) & iB\vartheta_4(v) & B\vartheta_3(v) \\
\vartheta_2 & -\vartheta_1(v) & B\vartheta_3(v) & -iB\vartheta_4(v) \\
\vartheta_3 & \vartheta_4(v) & B\vartheta_2(v) & iB\vartheta_1(v) \\
\vartheta_4 & \vartheta_3(v) & iB\vartheta_1(v) & B\vartheta_2(v)
\end{array} \tag{1.5}$$

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit dieser vier ϑ-Funktionen (welche u.a. von Hermite/Weber verwendet wurde) ist, mit $\mu,\nu\in\{0,1\}$

$$\vartheta_{\mu\nu}(v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{\nu n}e^{\left(n+\frac{\mu}{2}\right)^2\pi i\tau}e^{\left(n+\frac{\mu}{2}\right)2\pi iv}$$

In dieser (äquivalenten) Notation lesen wir eine Differentialgleichung ab, die für alle vier ϑ-Funktionen gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\vartheta_{\mu\nu}(v|\tau) = 4\pi i \frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_{\mu\nu}(v|\tau) \tag{1.6}$$

Nun stellen wir noch die verschiedenen Schreibweisen der ϑ-Funktionen in einer Tabelle dar, welche aber mit Vorsicht zu genießen ist: die ersten beiden Spalten haben noch zwei Argumente, v und τ, während Glaisher und Freitag/Busam bei $\vartheta_{2,3,4}$ vor allem den Wert bei $v = 0$, den sog. ϑ-Null-Wert verwenden:

Tannery/Molk	Hermite/Weber	Glaisher	Freitag/Busam
$\vartheta_1(v\vert\tau)$	$\vartheta_{1,1}(v\vert\tau)$		
$\vartheta_2(v\vert\tau)$	$\vartheta_{1,0}(v\vert\tau)$	$k^{1/2}\rho^{1/2}$	$\tilde{\tilde{\vartheta}}(z=\tau)$
$\vartheta_3(v\vert\tau)$	$\vartheta_{0,0}(v\vert\tau)$	$\rho^{1/2}$	$\vartheta(z=\tau)$
$\vartheta_4(v\vert\tau)$	$\vartheta_{0,1}(v\vert\tau)$	$k'^{1/2}\rho^{1/2}$	$\tilde{\vartheta}(z=\tau)$

1.3 Nullstellen der ϑ-Funktionen

Die Nullstelle von ϑ_1 bei $v = 0$ folgt aus (1.2a). Wegen der Quasiperiodizität (1.3a) liegen auf allen Gitterpunkten $m + n\tau$ ebenso Nullstellen. Nun zeigen wir mit Hilfe eines nullstellenzählenden Integrals, dass dies alle Nullstellen von ϑ_1 sind (siehe unten). Dann erhalten wir mit obiger Tabelle (1.5) auch die Nullstellen der anderen ϑ-Funktionen. Wir benötigen später jedoch nur die von ϑ_3:

$$\vartheta_3\left(m+\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\,\middle|\,\tau\right) = 0 \tag{1.7}$$

Nun zum noch ausstehenden *Beweis*: Wir integrieren entlang des Parallelogramms P mit den Ecken $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\tau}{2}$, wobei wir zunächst annehmen, dass auf dem Rand keine Nullstellen liegen. Zu zeigen ist, dass das Parallelogramm nur die eine Nullstelle bei $v = 0$ enthält.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi i}\int_P \frac{\vartheta_1'(v|\tau)}{\vartheta_1(v|\tau)}\,dv \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/2-\tau/2}^{1/2-\tau/2}\left(\frac{d}{dv}\log\vartheta_1(v|\tau) - \frac{d}{dv}\log\vartheta_1(v+\tau|\tau)\right)\,dv \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/2+\tau/2}^{-1/2-\tau/2}\left(\frac{d}{dv}\log\vartheta_1(v|\tau) - \frac{d}{dv}\log\vartheta_1(v+1|\tau)\right)\,dv \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/2-\tau/2}^{1/2-\tau/2}\frac{d}{dv}\log\frac{\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_1(v+\tau|\tau)}\,dv \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/2+\tau/2}^{-1/2-\tau/2}\frac{d}{dv}\log\frac{\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_1(v+1|\tau)}\,dv
\end{aligned}$$

Aus (1.3a) lassen sich nun die Logarithmen berechnen:

$$\begin{aligned}\log \frac{\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_1(v+\tau|\tau)} &= \log\left(-qe^{2\pi iv}\right) = \pi i + \pi i\tau + 2\pi iv + 2\pi ik \\ \log \frac{\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_1(v+1|\tau)} &= \log(-1) = \pi i + 2\pi il\end{aligned}$$

wobei k und l passende ganze Zahlen sind. Die Ableitungen dieser Ausdrücke nach v sind $2\pi i$ bzw. 0, also folgt:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1/2-\tau/2}^{1/2-\tau/2} 2\pi i \; dv = 1$$

Da wir wir ansonsten den Integrationsweg ein bisschen ausbeulen könnten, darf auch auf dem Rand keine Nullstelle liegen (das hatten wir anfangs angenommen zur Vereinfachung).

1.4 Produktentwicklungen der ϑ-Funktionen

In diesem Kapitel betrachten wir die ϑ-Funktionen zunächst nicht als Funktionen von v mit Parameter τ, sondern als Funktionen von $z = e^{2\pi iv}$ mit Parameter $q = e^{\pi i\tau}$.

Nach (1.7) sind die Nullstellen von ϑ_3 bei $z = e^{2\pi i\left(m+\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right)} = -q^{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Wir definieren daher die Funktion $F(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{2m-1}z\right)\left(1+q^{2m-1}z^{-1}\right)$, welche dieselben Nullstellen wie $\vartheta_3(z)$ hat. Zum Beweis der Konvergenz des Produktes bilden wir den Logarithmus: die entstehende Summe konvergiert, da $\sum_{n=1}^{\infty}|q|^{2n-1}$ konvergiert. Also ist $F(z)$ eine Funktion, die überall bis auf $z = 0$ regulär ist.

Nun bilden wir $f(v) = F\left(e^{2\pi iv}\right) = F(z)$, dann ist $f(v+1) = f(v)$ und

$$\begin{aligned} f(v+\tau) &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{2m-1}e^{2\pi iv}e^{2\pi i\tau}\right)\left(1+q^{2m-1}e^{-2\pi iv}e^{-2\pi i\tau}\right) \\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{2m+1}e^{2\pi iv}\right)\left(1+q^{2m-3}e^{-2\pi iv}\right) \\ &= \frac{1+q^{-1}e^{-2\pi iv}}{1+qe^{2\pi iv}}f(v) = q^{-1}e^{-2\pi iv}f(v)\end{aligned}$$

Im dritten Schritt wurde der Index m verschoben, um auf die Form von $f(v)$ zu kommen, der entstandene Vorfaktor berücksichtigt die ersten Faktoren für $m = 1$; im vierten Schritt wurde zunächst mit $q^{-1}e^{-2\pi iv}$ erweitert, dann mit $1 + q^{-1}e^{-2\pi iv}$ gekürzt.

$f(v)$ und $\vartheta_3(v)$ haben also nicht nur dieselben Nullstellen, sondern auch dasselbe Verhalten bezüglich der Quasiperioden 1 und τ. Ihr Quotient $T = \vartheta_3(v)/f(v)$ ist daher eine elliptische Funktion ohne Polstellen, also konstant bezüglich v. Wir erhalten

$$\vartheta_3(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}z^n = T(q)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{2m-1}z\right)\left(1+q^{2m-1}z^{-1}\right) \tag{1.8}$$

Nun muss noch $T(q)$ berechnet werden. Hierzu ein Trick von Gauß: Wir setzen in Gleichung (1.8) zunächst $z=-1$ und dann $z=i$ ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
T(q) &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m-1}\right)^2} \\
\text{und} \quad T(q) &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n q^{n^2}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+iq^{2m-1}\right)\left(1-iq^{2m-1}\right)} = \frac{\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l q^{(2l)^2}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{4m-2}\right)}
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt Summanden mit ungeradem n weggelassen wurden, weil sich hier jeweils n und $-n$ aufheben, beachte $i^{-1}=-i$. Deshalb die Summation nur über gerade $n=2l$.

Das ergibt einerseits (aus $z=-1$):

$$
\begin{aligned}
\frac{T(q)}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)} &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m-1}\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{m}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m-1}\right)}
\end{aligned}
$$

Hier wurde im zweiten Schritt das Quadrat aufgetrennt; dann das Produkt mit q^{2m} und das mit q^{2m-1} zu dem mit allen q^m zusammengefasst. Andererseits liefert die Gleichung von $z=i$:

$$
\begin{aligned}
\frac{T(q)}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)} &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{4m-2}\right)} \\
&= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{4m}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{4m-2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{4m-2}\right)} \\
&= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{4n^2}}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{4m}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{8m-4}\right)}
\end{aligned}
$$

Hier wurde im zweiten Schritt das Produkt über die q^{2m} in das über q^{4m} und das über q^{4m-2} gespalten; der dritte Schritt ist die dritte binomische Formel.

Nun folgt aus dem Vergleich der beiden Resultate, dass für die Funktion $G(q)=T(q)/\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)$ die Identität $G(q)=G\left(q^4\right)$ gilt, also induktiv $G(q)=G\left(q^4\right)=G\left(q^{16}\right)=G\left(q^{4^k}\right)$. Da G stetig von q abhängt und weil $\lim_{k\to\infty} q^{4^k}=0$ ist, gilt also $G(q)=G(0)$. Hiermit folgt

$$
G(q)=\frac{T(q)}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)}=G(0)=T(0)=1, \text{ also } T(q)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)
$$

Das setzen wir nun in (1.8) ein und erhalten

$$
\vartheta_3(z;q)=\vartheta_3(v|\tau)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1+q^{2m-1}z\right)\left(1+q^{2m-1}z^{-1}\right)
$$

Die anderen Produktentwicklungen können wir jetzt mit Hilfe von Tabelle (1.5) auf die von ϑ_3 zurückführen:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(v|\tau) &= -iq^{1/4}e^{\pi iv}\vartheta_3\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right)\\
&= -iq^{1/4}e^{\pi iv}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1-q^{2m}e^{2\pi iv}\right)\left(1-q^{2m-2}e^{-2\pi iv}\right)\\
&= 2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1-q^{2m}e^{2\pi iv}\right)\left(1-q^{2m}e^{-2\pi iv}\right) \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Hier wurde im letzten Schritt, letzter Faktor, zuerst die Variable $m \to m' = m+1$ verschoben und dann das „verlorene“ erste Glied $1-e^{-2\pi iv}$ nach vorne gezogen.

Die beiden verbleibenden Produktentwicklungen folgen genauso aus Tabelle (1.5):

$$\begin{aligned}
\vartheta_2(v|\tau) &= 2q^{1/4}\cos\pi v\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1+q^{2m}e^{2\pi iv}\right)\left(1+q^{2m}e^{-2\pi iv}\right)\\
\vartheta_4(v|\tau) &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1-q^{2m-1}e^{2\pi iv}\right)\left(1-q^{2m-1}e^{-2\pi iv}\right)
\end{aligned}$$

Nun geben wir noch die sogenannten ϑ-Null-Werte an, d.h. $\vartheta_\lambda := \vartheta_\lambda(0|\tau)$ mit $\lambda \in \{1,2,3,4\}$. Weil jedoch $\vartheta_1 = \vartheta_1(0|\tau) = 0$ ist, berechnen wir hier den ersten nicht verschwindenden Term der q-Entwicklung: $\vartheta_1' = \frac{d}{dv}\vartheta_1(v|\tau)\big|_{v=0}$. Hierzu entwickeln wir in (1.9) $\sin\pi v = \pi v$ und lesen dann ab:

$$\vartheta_1' = 2\pi q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)^3 \qquad (1.10a)$$

$$\vartheta_2 = 2q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1+q^{2m}\right)^2 \qquad (1.10b)$$

$$\vartheta_3 = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1+q^{2m-1}\right)^2 \qquad (1.10c)$$

$$\vartheta_4 = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1-q^{2m-1}\right)^2 \qquad (1.10d)$$

Das Jacobi'sche Tripelprodukt: $\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4 = \vartheta_1'$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4 &= \vartheta_1'\prod_{m=1}^{\infty}\left(\left(1+q^{2m}\right)\left(1+q^{2m-1}\right)\left(1-q^{2m-1}\right)\right)^2\\
&= \vartheta_1'\prod_{m=1}^{\infty}\left(\left(1+q^{2m}\right)\left(1-q^{4m-2}\right)\right)^2 = \vartheta_1' H(q)^2
\end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
H(q) &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1+q^{2m}\right)\left(1-q^{4m-2}\right) \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1+q^{4m}\right)\left(1+q^{4m-2}\right)\left(1-q^{4m-2}\right) \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1+q^{4m}\right)\left(1-q^{8m-4}\right) = H\left(q^2\right)
\end{aligned}
$$

Es ist also, analog zu $G(q)$ weiter oben, $H(q) = H\left(q^2\right) = H\left(q^{2^k}\right) = H(0) = 1$ und wir erhalten:

$$\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4 = \vartheta_1' \tag{1.11}$$

Noch eine Formel für später: Mit der Definition von ϑ_1 aus (1.2a) folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}{2} = \frac{\vartheta_1'}{2\pi} = \frac{\frac{\partial}{\partial v}\vartheta_1(v|\tau)|_{v=0}}{2\pi} &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(-1)^m q^{(m+1/2)^2} \\
&= q^{1/4}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^k q^{k^2+k}
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

1.5 Die Jacobi'sche Thetarelation $\vartheta_3^4 = \vartheta_2^4 + \vartheta_4^4$

Die Funktionen $\vartheta_\alpha^2(v)$ sind also ganze Funktionen bezüglich v und haben die Periode 1 und die Quasiperiode τ, wobei $\vartheta_\alpha^2(v+\tau){=}e^{-2\pi i\tau}e^{-4\pi i v}\cdot\vartheta_\alpha^2(v)$ gilt. Außerdem haben sie alle genau eine Nullstelle im Periodenparallelogramm, diese ist doppelt.

Wähle jetzt a und b so, dass für die Nullstelle v_0 von ϑ_2 die Relation $a\vartheta_1^2(v_0) + b\vartheta_4^2(v_0) = 0$ gilt. Explizit werden wir das gleich tun. Die Funktion $\frac{a\vartheta_1^2(v)+b\vartheta_4^2(v)}{\vartheta_2^2(v)}$ hat also noch einen *einfachen* Pol und ist doppeltperiodisch, weil sich die Faktoren bezüglich der Quasiperiode τ wegkürzen. Folglich ist diese Funktion konstant, und wir erhalten (nach evtl. Reskalierung) eine Identität

$$\vartheta_2^2(v) = a\vartheta_1^2(v) + b\vartheta_4^2(v) \qquad \text{und analog} \qquad \vartheta_3^2(v) = a'\vartheta_1^2(v) + b'\vartheta_4^2(v)$$

Nun berechnen wir mit $v = 0$ und $v = \tau/2$ die Werte von a, b, a', b': Bei $v = 0$ ist $\vartheta_1 = 0$, also gilt $\vartheta_2^2 = b\vartheta_4^2$ und $\vartheta_3^2 = b'\vartheta_4^2$. Bei $v = \tau/2$ gilt $\vartheta_4 = 0$, also $\vartheta_2^2(\tau/2) = a\vartheta_1^2(\tau/2)$ und $\vartheta_3^2(\tau/2) = a'\vartheta_1^2(\tau/2)$, also mit Tabelle (1.5) $\vartheta_3^2 = -a\vartheta_4^2$ und $\vartheta_2^2 = -a'\vartheta_4^2$. Dies setzen wir in obige zwei Identitäten ein:

$$\vartheta_2^2(v)\vartheta_4^2 = \vartheta_4^2(v)\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2(v)\vartheta_3^2 \qquad \text{und} \qquad \vartheta_3^2(v)\vartheta_4^2 = \vartheta_4^2(v)\vartheta_3^2 - \vartheta_1^2(v)\vartheta_2^2 \tag{1.13}$$

Mit $v \to v + 1/2$ folgen noch zwei ähnliche Gleichungen:

$$\vartheta_1^2(v)\vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(v)\vartheta_2^2 - \vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2 \qquad \text{und} \qquad \vartheta_4^2(v)\vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2 - \vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2 \tag{1.14}$$

Also lässt sich jedes Quadrat einer ϑ-Funktion durch zwei Quadrate anderer ϑ-Funktionen darstellen.

Nun setzen wir in die letze Identität $v = 0$ ein, dann erhalten wir die wichtige Jacobi'sche Thetarelation:

$$\vartheta_3^4 = \vartheta_2^4 + \vartheta_4^4 \tag{1.15}$$

Dies hätten wir auch einfacher zeigen können, wir werden aber später noch (1.13) benötigen.

Außerdem noch einige Folgerungen aus der Jacobi'schen Thetaralation:

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4 = \vartheta_3^4 \tag{1.16a}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2^8 + \vartheta_4^8 &= \left(\vartheta_3^4 - \vartheta_4^4\right)\vartheta_2^4 + \left(\vartheta_3^4 - \vartheta_2^4\right)\vartheta_4^4 = \vartheta_3^4\left(\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4\right) - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4 \\ &= \vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\end{aligned} \tag{1.16b}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2^{12} + \vartheta_4^{12} &= \left(\vartheta_3^4 - \vartheta_4^4\right)\vartheta_2^8 + \left(\vartheta_3^4 - \vartheta_2^4\right)\vartheta_4^8 = \vartheta_3^4\left(\vartheta_2^8 + \vartheta_4^8\right) - \vartheta_2^4\vartheta_4^8 - \vartheta_2^4\vartheta_4^8 \\ &= \vartheta_3^4\left(\vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\right) - \vartheta_2^4\vartheta_4^4\left(\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4\right) = \vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4\end{aligned} \tag{1.16c}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2^{16} + \vartheta_4^{16} &= \left(\vartheta_3^4 - \vartheta_4^4\right)\vartheta_2^{12} + \left(\vartheta_3^4 - \vartheta_2^4\right)\vartheta_4^{12} = \vartheta_3^4\left(\vartheta_2^{12} + \vartheta_4^{12}\right) - \vartheta_2^4\vartheta_4^4\left(\vartheta_2^8 + \vartheta_4^8\right) \\ &= \vartheta_3^4\left(\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4\right) - \vartheta_2^4\vartheta_4^4\left(\vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\right) \\ &= \vartheta_3^{16} - 4\vartheta_2^4\vartheta_3^8\vartheta_4^4 + 2\vartheta_2^8\vartheta_4^8\end{aligned} \tag{1.16d}$$

1.6 Ableitungen der ϑ-Funktionen

1.6.1 Ein Additionstheorem

Wir schreiben jetzt und später α, β, γ für die drei Zahlen 2, 3, 4 in beliebiger Reihenfolge (aber $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$). Aus der Liste (1.3) folgt, dass (für festes c) die Funktionen

$$\frac{\vartheta_1(v)\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_1(-c)\vartheta_\alpha(-c)\vartheta_1(v+c)\vartheta_\alpha(v-c)} \qquad \text{und} \qquad \frac{\vartheta_\beta(v)\vartheta_\gamma(v)}{\vartheta_\beta(-c)\vartheta_\gamma(-c)\vartheta_1(v+c)\vartheta_\alpha(v-c)}$$

elliptische Funktionen mit Perioden 1 und τ sind, wobei die Vorfaktoren so gewählt wurden, dass die Residuen der beiden Funktionen bei $v = -c$ gleich sind. Folglich ist die Differenz eine Konstante und wir erhalten nach Multiplikation mit $\vartheta_1(v+c)\vartheta_\alpha(v-c)$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_\beta(v)\vartheta_\gamma(v)}{\vartheta_\beta(-c)\vartheta_\gamma(-c)} - \frac{\vartheta_1(v)\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_1(-c)\vartheta_\alpha(-c)} &= C\vartheta_1(v+c)\vartheta_\alpha(v-c) \\ \text{also } \frac{\vartheta_1(v)\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_1(c)\vartheta_\alpha(c)} + \frac{\vartheta_\beta(v)\vartheta_\gamma(v)}{\vartheta_\beta(c)\vartheta_\gamma(c)} &= C\vartheta_1(v+c)\vartheta_\alpha(v-c) \\ \text{und für } v = 0 \qquad \frac{\vartheta_\beta\vartheta_\gamma}{\vartheta_\beta(c)\vartheta_\gamma(c)} &= C\vartheta_1(c)\vartheta_\alpha(c) \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde (siehe (1.2)), dass ϑ_1 eine ungerade Funktion in v ist, jedoch $\vartheta_{2,3,4}$ gerade bezüglich v sind..

Nun die zweite Gleichung mit dem Hauptnenner erweitern, die dritte nach C auflösen

$$\begin{aligned}
&\vartheta_1(v)\vartheta_\alpha(v)\vartheta_\beta(c)\vartheta_\gamma(c) + \vartheta_\beta(v)\vartheta_\gamma(v)\vartheta_1(c)\vartheta_\alpha(c) \\
&\qquad\qquad = C\vartheta_1(v+c)\vartheta_\alpha(v-c)\vartheta_1(c)\vartheta_\alpha(c)\vartheta_\beta(c)\vartheta_\gamma(c) \\
&\frac{\vartheta_\beta\vartheta_\gamma}{\vartheta_\beta(c)\vartheta_\gamma(c)\vartheta_1(c)\vartheta_\alpha(c)} = C
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir ein Additionstheorem:

$$\vartheta_\beta\vartheta_\gamma\vartheta_1(v+c)\vartheta_\alpha(v-c) = \vartheta_1(c)\vartheta_\alpha(c)\vartheta_\beta(v)\vartheta_\gamma(v) + \vartheta_\beta(c)\vartheta_\gamma(c)\vartheta_1(v)\vartheta_\alpha(v) \tag{1.17}$$

1.6.2 Definition, Eigenschaften und Ableitungen der f_α

Weil die ϑ-Funktionen bei $v \to v+\tau$ einen Faktor ausspucken, ist es hilfreich, Quotienten zu bilden. Wir definieren die Funktionen

$$f_\alpha(v|\tau) = \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_\alpha}\frac{\vartheta_\alpha(v|\tau)}{\vartheta_1(v|\tau)}, \qquad\qquad \alpha = 2,3,4 \tag{1.18}$$

wobei der Vorfaktor so gewählt wurde, dass das Residuum der f_α bei $v=0$ genau 1 ist. Mit der Liste (1.3) berechnen wir das Transformationsverhalten:

$$f_2(v+1) = f_2(v), \qquad\qquad f_2(v+\tau) = -f_2(v) \tag{1.19a}$$
$$f_3(v+1) = -f_3(v), \qquad\qquad f_3(v+\tau) = -f_3(v) \tag{1.19b}$$
$$f_4(v+1) = -f_4(v), \qquad\qquad f_4(v+\tau) = f_4(v) \tag{1.19c}$$

Hier erkennen wir, dass die f_α^2 elliptische Funktionen mit Perioden 1 und τ sind, deren Laurentreihe in den Polen bei $v \equiv 0 \pmod{1,\tau}$ mit $\frac{1}{v^2}$ beginnt und nur gerade Terme beinhaltet (durch die Quadrierung). Jede Differenz ist also eine elliptische Funktion ohne Pole und somit konstant:

$$f_\alpha^2(v|\tau) - f_\beta^2(v|\tau) = C_{\alpha\beta} \tag{1.20}$$

Es ist aber, weil $\vartheta_{2,3,4}$ gerade und ϑ_1 ungerade ist,

$$\begin{aligned}
f_\alpha^2(v|\tau) &= \left(\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_\alpha}\frac{\vartheta_\alpha + \vartheta_\alpha''\frac{v^2}{2} + \dots}{\vartheta_1' v + \vartheta_1'''\frac{v^3}{6} + \dots}\right)^2 = \frac{1}{v^2}\frac{1 + \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha}v^2 + \dots}{1 + \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\frac{v^2}{3} + \dots} \\
&= \frac{1}{v^2}\left(1 + \left(\frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha} - \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)v^2 + \dots\right)
\end{aligned}$$

wobei der Strich $'$ eine Ableitung nach v meint; und wenn die Abhängigkeit von v nicht explizit dabeisteht der Wert bei $v=0$ gemeint ist. Wir erhalten:

$$C_{\alpha\beta} = f_\alpha^2(v|\tau) - f_\beta^2(v|\tau) = \frac{\vartheta_\alpha''}{\vartheta_\alpha} - \frac{\vartheta_\beta''}{\vartheta_\beta}$$

woraus mit der Differentialgleichung (1.6) folgt

$$C_{\alpha\beta} = 4\pi i \left(\frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_\alpha}{\vartheta_\alpha} - \frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_\beta}{\vartheta_\beta} \right) = 4\pi i \frac{\partial}{\partial\tau} \log \frac{\vartheta_\alpha(0|\tau)}{\vartheta_\beta(0|\tau)}$$

$$= -4\pi^2 q \frac{d}{dq} \log \frac{\vartheta_\alpha(0,q)}{\vartheta_\beta(0,q)} \tag{1.21}$$

Mit der Definition der f_α, der Tabelle (1.5) und dem Jacobi'schen Tripelprodukt $\vartheta_1' = \pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$ (siehe (1.11)) erhalten wir folgende Liste (Notation $f_\alpha(v)$ statt $f_\alpha(v|\tau)$):

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \pi\vartheta_4^2 \qquad f_4\left(\frac{1}{2}\right) = \pi\vartheta_3^2 \tag{1.22a}$$

$$f_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = -i\pi\vartheta_3^2 \qquad f_3\left(\frac{\tau}{2}\right) = -i\pi\vartheta_2^2 \qquad f_4\left(\frac{\tau}{2}\right) = 0 \tag{1.22b}$$

$$f_2\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -i\pi\vartheta_4^2 \qquad f_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 0 \qquad f_4\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = \pi\vartheta_2^2 \tag{1.22c}$$

Wir leiten das Additionstheorem (1.17) nach c ab und setzen $c = 0$ ein:

$$\vartheta_\beta\vartheta_\gamma(\vartheta_1'(v)\vartheta_\alpha(v) - \vartheta_1(v)\vartheta_\alpha'(v)) = \vartheta_1'\vartheta_\alpha\vartheta_\beta(v)\vartheta_\gamma(v)$$

wobei auf der rechten Seite verwendet wurde, dass $\vartheta_\alpha' = 0$ für $\alpha = 2,3,4$ ist (weil es gerade Funktionen in v sind). Die Klammer auf der linken Seite sieht schon ein bisschen nach der Quotientenregel aus, wir formen um zu:

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_\alpha}\frac{d}{dv}\frac{\vartheta_\alpha(v)}{\vartheta_1(v)} = -\frac{\vartheta_1'^2}{\vartheta_\beta\vartheta_\gamma}\frac{\vartheta_\beta(v)\vartheta_\gamma(v)}{\vartheta_1^2(v)}$$

In Erinnerung an die Definition der f_α lesen wir daraus ab:

$$f_\alpha'(v) = -f_\beta(v)f_\gamma(v), \qquad \alpha = 2,3,4 \tag{1.23}$$

Diese Gleichung ermöglicht es, *beliebige* Ableitungen der f_α als Polynom in den f_2, f_3, f_4 zu schreiben. Beispielsweise ist

$$(f_\alpha^2)' = 2f_\alpha f_\alpha' = -2f_\alpha f_\beta f_\gamma = -2f_2f_3f_4 \tag{1.24}$$

1.6.3 Differentialgleichung, alternative Darstellung durch Integrale

Ziel dieses Kapitels ist die Einführung einer alternativen Notation, welche von Glaisher verwendet wurde, und welche für einen der Beweise nötig sein wird, weil sie erweiterbarer ist als die gehabte Notation.

Sei nun $\xi := \vartheta_1(v)/\vartheta_4(v)$. Dann ist mit der Definition der f_α:

$$\frac{d\xi}{dv} = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{f_4(v)}\right)\cdot\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4} = \frac{-f_4'(v)}{f_4^2(v)}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4} = \frac{f_2(v)f_3(v)}{f_4^2(v)}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4}$$

$$= \frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_4^2(v)}\underbrace{\frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_2\vartheta_3}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_4}}_{\pi\vartheta_4^2} = \pi\vartheta_4^2\frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_4^2(v)}$$

Durch Quadrieren folgt mit der Gleichung (1.13):

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\xi}{dv}\right)^2 &= \pi^2\vartheta_4^4\frac{\vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_4^4(v)} = \pi^2\left(\vartheta_2^2 - \frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_4^2(v)}\vartheta_3^2\right)\left(\vartheta_3^2 - \frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_4^2(v)}\vartheta_2^2\right)\\ &= \pi^2\left(\vartheta_2^2 - \xi^2\vartheta_3^2\right)\left(\vartheta_3^2 - \xi^2\vartheta_2^2\right)\end{aligned}$$

Schreibe nun $y := \xi\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}$ und $u := \pi\vartheta_3^2 v$ und $k := \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}$, dann erhalten wir:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\left(\frac{d\xi}{dv}\right)^2\frac{1}{\pi^2\vartheta_3^4} = \frac{1}{\pi^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2}\left(\frac{d\xi}{dv}\right)^2 = \left(1-\xi^2\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\right)\left(1-\xi^2\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

Wir erhalten also eine Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \left(1-y^2\right)\left(1-k^2y^2\right) \tag{1.25}$$

Durch das Konstruktionsverfahren, wie wir auf diese DGL gekommen sind, kennen wir bereits eine Lösung:

$$y(u) = \xi\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(\pi^{-1}\vartheta_3^{-2}u\right)}{\vartheta_4\left(\pi^{-1}\vartheta_3^{-2}u\right)} \tag{1.26}$$

Es gilt $y(u+\pi\vartheta_3^2) = -y(u)$ und $y(u+\pi\vartheta_3^2\tau) = y(u)$, also ist $y(u)$ eine doppeltperiodische Funktion, wir interessieren uns aber primär für die erste der beiden Eigenschaften.

Für $u_0 = 0$ folgt $y_0 = y(u_0) = \frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = 0$, weil $\vartheta_1(0) = 0$ ist. Für $u_1 = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2$ folgt $y_1 = y(u_1) = \frac{\vartheta_1(1/2)}{\vartheta_4(1/2)}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = 1$. Also folgt:

$$\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 = \int_{u_0}^{u_1} du' = \int_{y_0}^{y_1}\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y'} dy' = \int_0^1 \frac{dy'}{\sqrt{(1-y'^2)\,(1-k^2y'^2)}} =: K(k)$$

Zur Vollständigkeit definieren wir noch $k' := \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2}$, dann lautet die Jacobi'sche Thetarelation $k^2 + k'^2 = 1$.

Zusammenfassend haben wir definiert und gezeigt:

$$k := \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \qquad k' := \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2}, \qquad k^2 + k'^2 = 1 \tag{1.27a}$$

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\vartheta_3^2 \tag{1.27b}$$

1.7 Transformationen der ϑ-Null-Werte

In diesem Kapitel werden neun Transformationsformeln bewiesen, die für die rekursiven Berechnungsformeln der Restglieder benötigt werden. Die neun Formeln lauten:

$$\text{Für } q \to -q \text{ gilt:} \quad \vartheta_2 \to \sqrt{i}\,\vartheta_2, \qquad \vartheta_3 \to \vartheta_4, \qquad \vartheta_4 \to \vartheta_3. \tag{1.28}$$

$$\text{Für } q \to q^2 \text{ gilt:} \quad \vartheta_2^2 \to \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^2 - \vartheta_4^2\right), \quad \vartheta_3^2 \to \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^2 + \vartheta_4^2\right), \quad \vartheta_4^2 \to \vartheta_3\vartheta_4. \tag{1.29}$$

$$\text{Für } q \to q^{1/2} \text{ gilt:} \quad \vartheta_2^2 \to 2\vartheta_2\vartheta_3, \qquad \vartheta_3^2 \to \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2, \qquad \vartheta_4^2 \to \vartheta_3^2 - \vartheta_2^2. \tag{1.30}$$

In der bisherigen Version, welche ich als Zulassungs- und Diplomarbeit abgegeben habe, fehlte der Beweis von einer der Gleichungen, hier ist nun der vollständige Beweis aller Gleichungen. An dieser Stelle möchte ich Neil Sloane (Mitautor von [Con]) für seine Email danken, in der er mir einen Hinweis gab, der letztlich zur Lösung des Problems führte.

Wir schreiben in diesem Abschnitt $\vartheta(q)$ statt $\vartheta(0|\tau)$, wobei wie gehabt $q = e^{\pi i \tau}$ gilt.

1.7.1 Verhalten für $q \to -q$

Wir betrachten die Produktentwicklungen der ϑ-Funktionen in (1.10) und lesen das Transformationsverhalten für $q \to -q$ direkt ab:

$$\vartheta_2(-q) = \sqrt{i}\,\vartheta_2(q) \tag{1.28a}$$
$$\vartheta_3(-q) = \vartheta_4(q) \tag{1.28b}$$
$$\vartheta_4(-q) = \vartheta_3(q) \tag{1.28c}$$

1.7.2 Verhalten für $q \to q^2$

Beginnen wir mit einem Hilfssatz. Die Idee hierfür stammt aus [BB].

Satz: Für die Anzahlformel $A_2(n)$ gilt:

$$A_2(2n) = A_2(n)$$

Beweis. Wir beweisen den Satz, indem wir eine Bijektion φ von der Menge M in die Menge M' angeben:

$$M = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 = n\right\}$$
$$M' = \left\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid c^2 + d^2 = 2n\right\}$$

Die folgende Gleichung bildet den Kern des Beweises:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = 2a^2 + 2b^2$$

und sie liefert direkt die gesuchte Bijektion φ:

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow M' \\ (a,b) &\longmapsto (a+b, a-b) \end{aligned}$$

mit der Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : M' &\longrightarrow M \\ (c,d) &\longmapsto \left(\frac{c+d}{2}, \frac{c-d}{2}\right) \end{aligned}$$

- *Wohldefiniertheit von φ:* Wenn ein Tupel $(a,b) \in M$ gegeben ist, gilt $a^2 + b^2 = n$, also $2a^2 + 2b^2 = 2n$. Weil aber dann auch $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2n$ gilt, liegt das Tupel $(a+b, a-b)$ folglich in M'.
- *Wohldefiniertheit von φ^{-1}:* Wenn ein Tupel $(c,d) \in M'$ gegeben ist, gilt $c^2 + d^2 = 2n$, also müssen entweder c und d beide ungerade oder beide gerade sein. Also ist in beiden Fällen sowohl $c+d$ als auch $c-d$ eine gerade Zahl, und $\varphi^{-1}(c,d) \in \mathbb{Z}^2$. Dass darüberhinaus $\varphi^{-1}(c,d) \in M$ gilt, folgt wieder aus obiger binomischer Formel:

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(c^2 + d^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2n = n$$

□

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun eine weitere Transformationsformel herleiten:

- Es gilt nach Definition der Anzahlformel $A_2(n)$:

$$\vartheta_3^2(q) = \sum_{n=0}^{\infty} A_2(n) q^n$$

- Es gilt (mit Hilfe von (1.28b)):

$$\vartheta_4^2(q) = \vartheta_3^2(-q) = \sum_{n=0}^{\infty} A_2(n)(-q)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_2(n) q^n$$

- Also folgt

$$\vartheta_3^2(q) + \vartheta_4^2(q) = \sum_{n=0}^{\infty} A_2(n) \cdot (1 + (-1)^n) \cdot q^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_2(2n) q^{2n},$$

  weil für ungerade n gilt: $1 + (-1)^n = 0$, sowie für gerade n gilt $1 + (-1)^n = 2$.

- Wegen der Gleichung

$$\vartheta_3^2(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_2(n) q^{2n}$$

  und der Identität $A_2(2n) = A_2(n)$ folgt nun das Transformationsverhalten von $\vartheta_3(q^2)$:

$$\vartheta_3^2(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_2(n) q^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} A_2(2n) q^{2n} = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^2(q) + \vartheta_4^2(q)\right) \tag{1.29a}$$

Nun werden wir das Transformationsverhalten von $\vartheta_4(q^2)$ direkt aus der Produktentwicklung (1.10) herleiten:

$$\begin{aligned}
\vartheta_4^2(q^2) &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1-q^{4m}\right)^2 \left(1-q^{2(2m-1)}\right)^4 \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1-q^{4m}\right)^2 \left(1-q^{4m-2}\right)^2 \left(1-q^{2(2m-1)}\right)^2 \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1-q^{2m}\right)^2 \left(1-q^{2(2m-1)}\right)^2 \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1-q^{2m}\right)^2 \left(1+q^{2m-1}\right)^2 \left(1-q^{2m-1}\right)^2 \\
&= \vartheta_3(q)\vartheta_4(q) \qquad\qquad (1.29b)
\end{aligned}$$

Schließlich folgt das Transformationsverhalten von $\vartheta_2(q^2)$ mit Hilfe der Jacobi'schen Thetarelation (1.15) direkt aus (1.29a) und (1.29b):

$$\begin{aligned}
\vartheta_2^4(q^2) &= \vartheta_3^4(q^2) - \vartheta_4^4(q^2) \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\vartheta_3^2(q) + \vartheta_4^2(q)\right)\right]^2 - \left[\vartheta_3(q)\vartheta_4(q)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\vartheta_3^4(q) + \frac{1}{2}\vartheta_3^2(q)\vartheta_4^2(q) + \frac{1}{4}\vartheta_4^4(q) - \vartheta_3^2(q)\vartheta_4^2(q) \\
&= \frac{1}{4}\vartheta_3^4(q) - \frac{1}{2}\vartheta_3^2(q)\vartheta_4^2(q) + \frac{1}{4}\vartheta_4^4(q) \\
&= \frac{1}{4}\left(\vartheta_3^2(q) - \vartheta_4^2(q)\right)^2
\end{aligned}$$

und es folgt (durch Wurzel ziehen)

$$\vartheta_2^2(q^2) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^2(q) - \vartheta_4^2(q)\right) \qquad (1.29c)$$

wobei das Vorzeichen $+1$ z.B. aus dem ersten Koeffizienten der q-Entwicklungen folgt: $\vartheta_2^2(q^2) = 4q + \ldots$ und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\vartheta_3^2(q) - \vartheta_4^2(q)\right] &= \frac{1}{2}\left[(1 + A_2(1)\cdot q^1 + \ldots) - (1 - A_2(1)\cdot q^1 + \ldots)\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot A_2(1)\cdot q + \ldots \\
&= A_2(1)q + \ldots \\
&= 4q + \ldots
\end{aligned}$$

1.7.3 Verhalten für $q \to q^{1/2}$

Die Formeln für $q \to q^{1/2}$ folgen direkt aus denen für $q \to q^2$, deshalb diese hier nochmals im Überblick:

$$\vartheta_3^2(q^2) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^2(q) + \vartheta_4^2(q)\right) \tag{1.29a}$$

$$\vartheta_4^2(q^2) = \vartheta_3(q) \cdot \vartheta_4(q) \tag{1.29b}$$

$$\vartheta_2^2(q^2) = \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^2(q) - \vartheta_4^2(q)\right) \tag{1.29c}$$

Es gilt also:

$$\vartheta_3^2(q^2) + \vartheta_2^2(q^2) = \vartheta_3^2(q)$$
$$\vartheta_3^2(q^2) - \vartheta_2^2(q^2) = \vartheta_4^2(q)$$

und somit

$$\vartheta_3^2(q^{1/2}) = \vartheta_3^2(q) + \vartheta_2^2(q) \tag{1.30a}$$

$$\vartheta_4^2(q^{1/2}) = \vartheta_3^2(q) - \vartheta_2^2(q) \tag{1.30b}$$

und nun wieder mit Hilfe der Jacobi'schen Thetarelation (1.15):

$$\begin{aligned}
\vartheta_2^4(q^{1/2}) &= \vartheta_3^4(q^{1/2}) - \vartheta_4^4(q^{1/2}) \\
&= \left(\vartheta_3^2(q) + \vartheta_2^2(q)\right)^2 - \left(\vartheta_3^2(q) - \vartheta_2^2(q)\right)^2 \\
&= \vartheta_3^4(q) + 2\vartheta_3^2(q)\vartheta_2^2(q) + \vartheta_2^4(q) - \vartheta_3^4(q) + 2\vartheta_3^2(q)\vartheta_2^2(q) - \vartheta_2^4(q) \\
&= 4 \cdot \vartheta_3^2(q) \cdot \vartheta_2^2(q)
\end{aligned}$$

Wir ziehen wieder die Wurzel...

$$\vartheta_2^2(q^{1/2}) = 2 \cdot \vartheta_2(q) \cdot \vartheta_3(q) \tag{1.30c}$$

wobei das Vorzeichen $+1$ wieder aus dem Anfang der q-Entwicklung folgte, vergleiche die Produktentwicklungen (1.10).

2 Linearkombinationen

Wegen Gleichung (1.23) lassen sich alle Ableitungen von f_α und f_α^2 als Polynome in den f_2, f_3, f_4 schreiben und wegen Liste (1.22) sind die Funktionswerte an den Stellen $v = 1/2$ und $v = \tau/2$ gerade Potenzen in ϑ_2, ϑ_3 und ϑ_4. Um die Anzahlformeln $A_{2k}(n)$ zu berechnen, benötigen wir Darstellungen von ϑ_3^{2k}. In diesem Kapitel geben wir Darstellungen der ϑ_3^{2k} als Linearkombinationen der Ableitungen der f_α und f_α^2 an, wobei für $2k > 8$ ein Restterm auftaucht.

2.1 Berechnung der allgemeinen Ableitungen

Zur Berechnung der Ableitungen von f_α und f_α^2 verwenden wir Buchstaben als Abkürzungen für spezielle Polynome in den $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$. Was diese Vorhehensweise so praktisch bei der Berechnung vieler Ableitungen macht, ist die Tatsache, dass wir nur endlich viele (sechs) solcher Polynome benötigen, um *alle* Ableitungen darzustellen:

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= f_\alpha' = -f_\beta f_\gamma \\
A_\alpha' &= f_\alpha(f_\beta^2 + f_\gamma^2) = B_\alpha \\
B_\alpha' &= -f_\beta f_\gamma(f_\beta^2 + f_\gamma^2) + f_\alpha(-4f_\alpha f_\beta f_\gamma) = -f_\beta f_\gamma(4f_\alpha^2 + f_\beta^2 + f_\gamma^2) = A_\alpha C_\alpha \\
C_\alpha' &= -12 f_\alpha f_\beta f_\gamma = 12D \\
D' &= f_\alpha^2 f_\beta^2 + f_\beta^2 f_\gamma^2 + f_\gamma^2 f_\alpha^2 = E \\
E' &= -4 f_\alpha f_\beta f_\gamma(f_\alpha^2 + f_\beta^2 + f_\gamma^2) = 4DF \\
F' &= -6 f_\alpha f_\beta f_\gamma = 6D
\end{aligned}$$

zusammengefasst ist das:

$$A_\alpha = -f_\beta f_\gamma \qquad A_\alpha' = B_\alpha \tag{2.1a}$$
$$B_\alpha = f_\alpha(f_\beta^2 + f_\gamma^2) \qquad B_\alpha' = A_\alpha C_\alpha \tag{2.1b}$$
$$C_\alpha = 4f_\alpha^2 + f_\beta^2 + f_\gamma^2 \qquad C_\alpha' = 12D \tag{2.1c}$$
$$D = -f_\alpha f_\beta f_\gamma \qquad D' = E \tag{2.1d}$$
$$E = f_\alpha^2 f_\beta^2 + f_\beta^2 f_\gamma^2 + f_\gamma^2 f_\alpha^2 \qquad E' = 4DF \tag{2.1e}$$
$$F = f_\alpha^2 + f_\beta^2 + f_\gamma^2 \qquad F' = 6D \tag{2.1f}$$

In den ersten drei Polynomen spielt f_α eine gesonderte Rolle gegenüber f_β und f_γ, daher wird hier noch ein Index $\alpha = 2, 3, 4$ angehängt. Die letzten drei Polynome sind symmetrisch in allen drei $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$.

Mit den oben gefundenen Formeln berechnen wir die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
(f_\alpha^2)^{(1)} &= -2 f_\alpha f_\beta f_\gamma = 2D \\
(f_\alpha^2)^{(2)} &= 2D' = 2E \\
(f_\alpha^2)^{(3)} &= 2E' = 8DF \\
(f_\alpha^2)^{(4)} &= 8D'F + 8DF' = 8EF + 48D^2 \\
(f_\alpha^2)^{(5)} &= 8E'F + 8EF' + 96DD' = 32DF^2 + 144DE \\
(f_\alpha^2)^{(6)} &= 32D'F^2 + 64DFF' + 144D'E + 144DE' \\
&= 32EF^2 + 960D^2F + 144E^2 \\
(f_\alpha^2)^{(7)} &= 32E'F^2 + 64EFF' + 1920DD'F + 960D^2F' + 288EE' \\
&= 128DF^3 + 3456EDF + 5760D^3 \\
(f_\alpha^2)^{(8)} &= 128D'F^3 + 384DF^2F' + 3456E'DF \\
&\quad + 3456ED'F + 3456EDF' + 17280D^2D' \\
&= 128EF^3 + 16128D^2F^2 + 3456E^2F + 38016D^2E
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
f_\alpha^{(1)} &= A_\alpha \\
f_\alpha^{(2)} &= A'_\alpha = B_\alpha \\
f_\alpha^{(3)} &= B'_\alpha = A_\alpha C_\alpha \\
f_\alpha^{(4)} &= A'_\alpha C_\alpha + A_\alpha C'_\alpha = B_\alpha C_\alpha + 12A_\alpha D \\
f_\alpha^{(5)} &= B'_\alpha C_\alpha + B_\alpha C'_\alpha + 12A'_\alpha D + 12A_\alpha D' \\
&= A_\alpha C_\alpha^2 + 24B_\alpha D + 12A_\alpha E \\
f_\alpha^{(6)} &= A'_\alpha C_\alpha^2 + 2A_\alpha C_\alpha C'_\alpha + 24B'_\alpha D + 24B_\alpha D' + 12A'_\alpha E + 12A_\alpha E' \\
&= B_\alpha C_\alpha^2 + 48A_\alpha C_\alpha D + 36B_\alpha E + 48A_\alpha DF \\
f_\alpha^{(7)} &= B'_\alpha C_\alpha^2 + 2B_\alpha C_\alpha C'_\alpha + 48A'_\alpha C_\alpha D + 48A_\alpha C'_\alpha D + 48A_\alpha C_\alpha D' \\
&\quad + 36B'_\alpha E + 36B_\alpha E' + 48A'_\alpha DF + 48A_\alpha D'F + 48A_\alpha DF' \\
&= A_\alpha C_\alpha^3 + 72B_\alpha C_\alpha D + 864A_\alpha D^2 + 84A_\alpha C_\alpha E + 192B_\alpha DF + 48A_\alpha EF \\
f_\alpha^{(8)} &= A'_\alpha C_\alpha^3 + 3A_\alpha C_\alpha^2 C'_\alpha + 72B'_\alpha C_\alpha D + 72B_\alpha C'_\alpha D + 72B_\alpha C_\alpha D' \\
&\quad + 864A'_\alpha D^2 + 1728A_\alpha DD' + 84A'_\alpha C_\alpha E + 84A_\alpha C'_\alpha E + 84A_\alpha C_\alpha E' \\
&\quad + 192B'_\alpha DF + 192B_\alpha D'F + 192B_\alpha DF' \\
&\quad + 48A'_\alpha EF + 48A_\alpha E'F + 48A_\alpha EF' \\
&= B_\alpha C_\alpha^3 + 108A_\alpha C_\alpha^2 D + 2880B_\alpha D^2 + 156B_\alpha C_\alpha E + 3024A_\alpha DE \\
&\quad + 528A_\alpha C_\alpha DF + 240B_\alpha EF + 192A_\alpha DF^2
\end{aligned}$$

2.2 Werte der Ableitungen bei $v = 1/2, \tau/2$

Für die Berechnung der Werte der Ableitungen bei $v = 1/2, \tau/2$ setzen wir zunächst die Werte aus der Liste (1.22) in die Polynome (2.1) ein:

$v = 1/2$	A_4	$=$	0	D	$=$	0
	B_4	$=$	$\pi^3 \vartheta_3^2 \vartheta_4^4$	E	$=$	$\pi^4 \vartheta_3^4 \vartheta_4^4$
	C_4	$=$	$\pi^2 \left(4\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right)$	F	$=$	$\pi^2 \left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right)$
$v = \tau/2$	A_2	$=$	0	D	$=$	0
	B_2	$=$	$i\pi^3 \vartheta_2^4 \vartheta_3^2$	E	$=$	$\pi^4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4$
	C_2	$=$	$-\pi^2 \left(4\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4\right)$	F	$=$	$-\pi^2 \left(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4\right)$

Diese Werte setzen wir jetzt in die Ableitungsformeln, die oben berechnet wurden, ein (beachte hier $A = D = 0$, deshalb werden die Formeln kürzer):

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(2)}(1/2) = 2E = 2\pi^4 \vartheta_3^4 \vartheta_4^4 \tag{2.2}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(4)}(1/2) = 8EF = 8\pi^6 \vartheta_3^4 \vartheta_4^4 \left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right) = 8\pi^6 \left(\vartheta_3^8 \vartheta_4^4 + \vartheta_3^4 \vartheta_4^8\right) \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \left(f_\alpha^2\right)^{(6)}(1/2) &= 32EF^2 + 144E^2 = 32\pi^8 \vartheta_3^4 \vartheta_4^4 \left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right)^2 + 144\pi^8 \vartheta_3^8 \vartheta_4^8 \\ &= 16\pi^8 \left(2\vartheta_3^{12} \vartheta_4^4 + 13\vartheta_3^8 \vartheta_4^8 + 2\vartheta_3^4 \vartheta_4^{12}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(1/2) &= 128EF^3 + 3456E^2F \\ &= 128\pi^{10} \vartheta_3^4 \vartheta_4^4 \left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right)^3 + 3456\pi^{10} \vartheta_3^8 \vartheta_4^8 \left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right) \\ &= 128\pi^{10} \left(\vartheta_3^4 \vartheta_4^{16} + 30\vartheta_3^8 \vartheta_4^{12} + 30\vartheta_3^{12} \vartheta_4^8 + \vartheta_3^{16} \vartheta_4^4\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(2)}(\tau/2) = 2E = 2\pi^4 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 \tag{2.6}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(4)}(\tau/2) = 8EF = -8\pi^6 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 \left(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4\right) = -8\pi^6 \left(\vartheta_2^8 \vartheta_3^4 + \vartheta_2^4 \vartheta_3^8\right) \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \left(f_\alpha^2\right)^{(6)}(\tau/2) &= 32EF^2 + 144E^2 = 32\pi^8 \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 \left(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4\right)^2 + 144\pi^8 \vartheta_2^8 \vartheta_3^8 \\ &= 16\pi^8 \left(2\vartheta_2^{12} \vartheta_3^4 + 13\vartheta_2^8 \vartheta_3^8 + 2\vartheta_2^4 \vartheta_3^{12}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(\tau/2) &= 128EF^3 + 3456E^2F \\ &= -128\pi^{10} \vartheta_2^4 \vartheta_3^4 \left(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4\right)^3 - 3456\pi^{10} \vartheta_2^8 \vartheta_3^8 \left(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4\right) \\ &= -128\pi^{10} \left(\vartheta_3^4 \vartheta_2^{16} + 30\vartheta_3^8 \vartheta_2^{12} + 30\vartheta_3^{12} \vartheta_2^8 + \vartheta_3^{16} \vartheta_2^4\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$f_4^{(2)}(1/2) = B_4 = \pi^3 \vartheta_3^2 \vartheta_4^4 \tag{2.10}$$

$$f_4^{(4)}(1/2) = B_4C_4 = \pi^5 \vartheta_3^2 \vartheta_4^4 \left(4\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right) = \pi^5 \left(\vartheta_3^2 \vartheta_4^8 + 4\vartheta_3^6 \vartheta_4^4\right) \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} f_4^{(6)}(1/2) &= B_4C_4^2 + 36B_4E = \pi^7 \vartheta_3^2 \vartheta_4^4 \left(4\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right)^2 + 36\pi^7 \vartheta_3^6 \vartheta_4^8 \\ &= \pi^7 \left(16\vartheta_3^{10} \vartheta_4^4 + 44\vartheta_3^6 \vartheta_4^8 + \vartheta_3^2 \vartheta_4^{12}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} f_4^{(8)}(1/2) &= B_4C_4^3 + 156B_4C_4E + 240B_4EF \\ &= \pi^9 \vartheta_3^2 \vartheta_4^4 \left(4\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right)^3 + 156\pi^9 \vartheta_3^6 \vartheta_4^8 \left(4\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right) \\ &\quad + 240\pi^9 \vartheta_3^6 \vartheta_4^8 \left(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi^9 \left(64\vartheta_3^{14}\vartheta_4^4 + 912\vartheta_3^{10}\vartheta_4^8 + 408\vartheta_3^6\vartheta_4^{12} + \vartheta_3^2\vartheta_4^{16}\right) && (2.13)\\
f_2^{(2)}(\tau/2) &= B_2 = i\pi^3\vartheta_2^4\vartheta_3^2 && (2.14)\\
f_2^{(4)}(\tau/2) &= B_2C_2 = -i\pi^5\left(\vartheta_3^2\vartheta_2^8 + 4\vartheta_3^6\vartheta_2^4\right) && (2.15)\\
f_2^{(6)}(\tau/2) &= B_2C_2^2 + 36B_2E = i\pi^7\vartheta_2^4\vartheta_3^2\left(4\vartheta_3^4+\vartheta_2^4\right)^2 + 36i\pi^7\vartheta_2^8\vartheta_3^6\\
&= i\pi^7\left(16\vartheta_3^{10}\vartheta_2^4 + 44\vartheta_3^6\vartheta_2^8 + \vartheta_3^2\vartheta_2^{12}\right) && (2.16)\\
f_2^{(8)}(\tau/2) &= B_2C_2^3 + 156B_2C_2E + 240B_2EF\\
&= -i\pi^9\vartheta_2^4\vartheta_3^2\left(4\vartheta_3^4+\vartheta_2^4\right)^3 - 156i\pi^9\vartheta_2^8\vartheta_3^6\left(4\vartheta_3^4+\vartheta_2^4\right)\\
&\quad - 240i\pi^9\vartheta_2^8\vartheta_3^6\left(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4\right)\\
&= -i\pi^9\left(64\vartheta_3^{14}\vartheta_2^4 + 912\vartheta_3^{10}\vartheta_2^8 + 408\vartheta_3^6\vartheta_2^{12} + \vartheta_3^2\vartheta_2^{16}\right) && (2.17)
\end{aligned}
$$

2.3 Linearkombinationen

Für die Vereinfachungen in diesem Kapitel wird die Jacobi'sche Thetarelation mit ihren Folgerungen aus Kapitel 1.5 verwendet.

Aus Liste (1.22) lesen wir die ersten zwei Formeln ab:

$$
\begin{aligned}
f_4(1/2) &= \pi\vartheta_3^2 && (2.18)\\
\left(f_4^2\right)(1/2) &= \pi^2\vartheta_3^4 && (2.19)
\end{aligned}
$$

Mit den Gleichungen (2.14) und (2.10) folgt:

$$
f_4^{(2)}(1/2) - if_2^{(2)}(\tau/2) = \pi^3\vartheta_3^2\left(\vartheta_4^4+\vartheta_2^4\right) = \pi^3\vartheta_3^6 \tag{2.20}
$$

Mit den Gleichungen (2.2) und (2.6) folgt:

$$
\left(f_\alpha^2\right)^{(2)}(1/2) + \left(f_\alpha^2\right)^{(2)}(\tau/2) = 2\pi^4\vartheta_3^4\left(\vartheta_4^4+\vartheta_2^4\right) = 2\pi^4\vartheta_3^8 \tag{2.21}
$$

Mit den Gleichungen (2.15) und (2.11) folgt:

$$
\begin{aligned}
f_4^{(4)}(1/2) + if_2^{(4)}(\tau/2) &= \pi^5\vartheta_3^2\left(\vartheta_2^8+\vartheta_4^8\right) + 4\pi^5\vartheta_3^6\left(\vartheta_2^4+\vartheta_4^4\right)\\
&= \pi^5\vartheta_3^2\left(\vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\right) + 4\pi^5\vartheta_3^{10}\\
&= 5\pi^5\vartheta_3^{10} - 2\pi^5\vartheta_3^2\vartheta_2^4\vartheta_4^4 && (2.22)
\end{aligned}
$$

Mit den Gleichungen (2.3) und (2.7) folgt:

$$
\begin{aligned}
\left(f_\alpha^2\right)^{(4)}(1/2) - \left(f_\alpha^2\right)^{(4)}(\tau/2) &= 8\pi^6\vartheta_3^4\left(\vartheta_2^8+\vartheta_4^8\right) + 8\pi^6\vartheta_3^8\left(\vartheta_2^4+\vartheta_4^4\right)\\
&= 8\pi^6\left(\vartheta_3^4\left(\vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\right) + \vartheta_3^{12}\right)\\
&= 16\pi^6\vartheta_3^{12} - 16\pi^6\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4 && (2.23)
\end{aligned}
$$

Mit den Gleichungen (2.16) und (2.12) folgt:

$$
\begin{aligned}
&f_4^{(6)}(1/2) - i f_2^{(6)}(\tau/2)\\
&= \pi^7 \vartheta_3^2 \left(\vartheta_2^{12} + \vartheta_4^{12}\right) + 44\pi^7 \vartheta_3^6 \left(\vartheta_2^8 + \vartheta_4^8\right) + 16\pi^7 \vartheta_3^{10} \left(\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4\right)\\
&= \pi^7 \vartheta_3^2 \left(\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4\right) + 16\pi^7 \vartheta_3^{14} + 44\pi^7 \vartheta_3^6 \left(\vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\right)\\
&= 61\pi^7 \vartheta_3^{14} - 91\pi^7 \vartheta_3^6 \vartheta_2^4 \vartheta_4^4 \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Mit den Gleichungen (2.4) und (2.8) folgt:

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(f_\alpha^2\right)^{(6)}(1/2) + \left(f_\alpha^2\right)^{(6)}(\tau/2)\right]/(16\pi^8)\\
&= 2\vartheta_3^4 \left(\vartheta_2^{12} + \vartheta_4^{12}\right) + 13\vartheta_3^8 \left(\vartheta_2^8 + \vartheta_4^8\right) + 2\vartheta_3^{12} \left(\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4\right)\\
&= 2\vartheta_3^4 \left(\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4\right) + 13\vartheta_3^8 \left(\vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\right) + 2\vartheta_3^{16}\\
&= 17\vartheta_3^{16} - 32\vartheta_3^8\vartheta_2^4\vartheta_4^4 \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Mit den Gleichungen (2.17) und (2.13) folgt:

$$
\begin{aligned}
&\left[f_4^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) + i f_2^{(8)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]/\pi^9\\
&= 64\vartheta_3^{14}\left(\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4\right) + 912\vartheta_3^{10}\left(\vartheta_2^8 + \vartheta_4^8\right) + 408\vartheta_3^6\left(\vartheta_2^{12} + \vartheta_4^{12}\right) + \vartheta_3^2\left(\vartheta_2^{16} + \vartheta_4^{16}\right)\\
&= 64\vartheta_3^{18} + 912\vartheta_3^{10}\left(\vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\right) + 408\vartheta_3^6\left(\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4\right)\\
&\quad + \vartheta_3^2\left(\vartheta_3^{16} - 4\vartheta_2^4\vartheta_3^8\vartheta_4^4 + 2\vartheta_2^8\vartheta_4^8\right)\\
&= 1385\vartheta_3^{18} + 2\vartheta_3^2\vartheta_2^8\vartheta_4^8 - 3052\vartheta_3^{10}\vartheta_2^4\vartheta_4^4 \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

Mit den Gleichungen (2.5) und (2.9) folgt:

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(1/2) - \left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(\tau/2)\right]/(128\pi^{10})\\
&= \vartheta_3^4(\vartheta_2^{16} + \vartheta_4^{16}) + 30\vartheta_3^8(\vartheta_2^{12} + \vartheta_4^{12}) + 30\vartheta_3^{12}(\vartheta_2^8 + \vartheta_4^8) + \vartheta_3^{16}(\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4)\\
&= \vartheta_3^4(\vartheta_3^{16} - 4\vartheta_2^4\vartheta_3^8\vartheta_4^4 + 2\vartheta_2^8\vartheta_4^8) + 30\vartheta_3^8(\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4)\\
&\quad + 30\vartheta_3^{12}(\vartheta_3^8 - 2\vartheta_2^4\vartheta_4^4) + \vartheta_3^{20}\\
&= 62\vartheta_3^{20} - 154\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 + 2\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8\\
\Rightarrow 31\vartheta_3^{20} &= \left[\left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(1/2) - \left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(\tau/2)\right]/(256\pi^{10}) + 77\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 - \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

3 Lambert-Reihen

Durch das vorige Kapitel haben wir das Problem der q-Entwicklung der ϑ_3^{2k} im Wesentlichen auf die Berechnung der Lambert-Reihen der obigen Ableitungen zurückgeführt. Wir beenden daher die Vorbereitungen, indem wir die Lambert-Reihen dieser Ableitungen berechnen:

3.1 Lambert-Reihen von $f_4^{(2k)}\left(\frac{1}{2}\right)$

Aus ihrem Transformationsverhalten (1.19c) folgt, dass die Funktion $f_4(v|\tau)$ die Perioden 2 und τ hat. Ihre Pole erster Ordnung bei $v \equiv 0 \pmod{1, \tau}$ haben alternierende Residuen: bei $v \equiv 0 \pmod{2, \tau}$ Residuum $+1$ und bei $v \equiv 1 \pmod{2, \tau}$ Residuum -1. Jetzt basteln wir eine neue Funktion, die dasselbe Polstellenverhalten hat. Hierzu definieren wir zuerst

$$\Phi(v|\tau) = \frac{\vartheta_1'(v|\tau)}{\vartheta_1(v|\tau)} = \frac{d}{dv} \log \vartheta_1(v|\tau), \tag{3.1}$$

eine Funktion mit einfachen Polen bei $v \equiv 0 \pmod{1, \tau}$ mit Residuum $+1$. Aus dem Transformationsverhalten von ϑ_1 in (1.3) folgt:

$$\Phi(v+1|\tau) = \Phi(v|\tau) \qquad \text{und} \qquad \Phi(v+\tau|\tau) = -2\pi i + \Phi(v|\tau) \tag{3.2}$$

Wenn wir nun die Funktion $\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right)$ bilden, hat diese nur noch jeden zweiten Pol, nämlich bei $v \equiv 0 \pmod{2, \tau}$ mit Residuum 1. Folglich hat die Funktion $\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v+1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right)$ dieselben Pole mit denselben Residuen wie f_4, außerdem wegen (3.2) dieselben Perioden $2, \tau$. Also ist die Differenz eine Konstante:

$$f_4(v|\tau) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v+1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right) = C$$

Zur Bestimmung von C setzen wir $v = 0$ ein und, weil $f_4(v|\tau) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right)$ hier regulär und ungerade ist, verbleibt lediglich

$$C = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_2'\left(0\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_2\left(0\middle|\frac{\tau}{2}\right)} = 0$$

weil ϑ_2 ungerade ist. Wir erhalten die Darstellung

$$f_4(v|\tau) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v+1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right) \tag{3.3}$$

Nun setzen wir in (1.9) nicht $q = e^{\pi i \tau}$, sondern $e^{\pi i \tau/2} = q^{1/2}$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}\Phi\left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right) &= \frac{d}{dv} \log \vartheta_1 \left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right) \\ &= \pi \cot \pi v + 2\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-q^m e^{2\pi i v}}{1 - q^m e^{2\pi i v}} + \frac{q^m e^{-2\pi i v}}{1 - q^m e^{-2\pi i v}} \right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Falls $\Im(-\tau/2) < \Im(v) < \Im(\tau/2)$, gilt $|qe^{\pm 2\pi i v}| < 1$ und wir können die geometrische Reihe anwenden:

$$\begin{aligned}\Phi\left(v \,\middle|\, \frac{\tau}{2}\right) &= \pi \cot \pi v + 2\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-q^{km} e^{2\pi i k v} + q^{km} e^{-2\pi i k v} \right) \\ &= \pi \cot \pi v + 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q^{km} \sin 2\pi k v \\ &= \pi \cot \pi v + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1 - q^k} \sin 2\pi k v \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wenn wir diese Gleichung in (3.3) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} f_4(v|\tau) &= \pi \left(\frac{1}{2} \cot \pi \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \cot \pi \frac{v+1}{2} \right) \\ &\quad + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1 - q^k} \left(\frac{1}{2} \sin \pi k v - \frac{1}{2} \sin \pi k (v+1) \right) \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi v} + 4\pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{2j-1}}{1 - q^{2j-1}} \sin(2j-1)\pi v \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos \pi v/2}{\sin \pi v/2} + \frac{\sin \pi v/2}{\cos \pi v/2}\right) = \frac{1}{2 \sin \pi v/2 \cos \pi v/2} = \frac{1}{\sin \pi v}$ verwendet wurde und die Tatsache, dass wegen $\sin(x + 2j \cdot \pi) = \sin x$ sich in der Summation die geraden Indizes genau aufheben.

Für die Ableitungen der Gleichung (3.6) benötigen wir zunächst die Ableitungen von $h(v) := \frac{\pi}{\sin \pi v}$ an der Stelle $v = 1/2$. Führe dies auf die Taylorreihe des Cosinus zurück und wende die geometrische Reihe an:

$$\begin{aligned} h(1/2 + \delta) &= \frac{\pi}{\sin \pi(\delta + 1/2)} = \frac{\pi}{\cos \pi \delta} \\ &= \pi \left(1 + \frac{(\pi\delta)^2}{2!} + 5\frac{(\pi\delta)^4}{4!} + 61\frac{(\pi\delta)^6}{6!} + 1385\frac{(\pi\delta)^8}{8!} \right) \end{aligned}$$

Bei $v = 1/2$, d.h. $\delta = 0$ ist also:

$$h^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^3, \qquad h^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = 5\pi^5, \qquad h^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right) = 61\pi^7, \qquad h^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1385\pi^9.$$

Hiermit können nun die Ableitungen der Gleichung (3.6) ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
f_4^{(2)}(v|\tau) &= \frac{d^2}{dv^2}\left(h(v) + 4\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\pi v\right) \\
&= h^{(2)}(v) - 4\pi^3\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^2 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\pi v \\
f_4^{(4)}(v|\tau) &= h^{(4)}(v) + 4\pi^5\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^4 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\pi v \\
f_4^{(6)}(v|\tau) &= h^{(6)}(v) - 4\pi^7\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^6 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\pi v \\
f_4^{(8)}(v|\tau) &= h^{(8)}(v) + 4\pi^9\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^8 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\sin(2m-1)\pi v
\end{aligned}$$

Hieraus folgt an der Stelle $v = \frac{1}{2}$:

$$f_4^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^3 - 4\pi^3\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)^2 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} \tag{3.7a}$$

$$f_4^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = 5\pi^5 + 4\pi^5\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)^4 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} \tag{3.7b}$$

$$f_4^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right) = 61\pi^7 - 4\pi^7\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)^6 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} \tag{3.7c}$$

$$f_4^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1385\pi^9 + 4\pi^9\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)^8 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} \tag{3.7d}$$

3.2 Lambert-Reihen von $if_2^{(2k)}\left(\frac{\tau}{2}\right)$

Analog zu f_4 lässt sich mit (1.19) eine Formel für f_2 herleiten: $\Phi(v|2\tau)$ hat Residuum $+1$ bei $v \equiv 0 \pmod{1, 2\tau}$ und $-\Phi(v+\tau|2\tau)$ hat Residuum -1 bei $v \equiv \tau \pmod{1, 2\tau}$.

Also ist:

$$
\begin{aligned}
f_2(v|\tau) &= \Phi(v|2\tau) - \Phi(v+\tau|2\tau) + C \\
&= \frac{\vartheta_1'(v|2\tau)}{\vartheta_1(v|2\tau)} - \frac{\vartheta_4'(v|2\tau)}{\vartheta_4(v|2\tau)} = \frac{d}{dv}\log\vartheta_1(v|2\tau) - \frac{d}{dv}\log\vartheta_4(v|2\tau) \\
&= \pi\cot\pi v + 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{4k}}{1-q^{4k}}\sin 2\pi kv \\
&\quad + \underbrace{2\pi i\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{4m-2}e^{2\pi iv}}{1-q^{4m-2}e^{2\pi iv}} - \frac{q^{4m-2}e^{-2\pi iv}}{1-q^{4m-2}e^{-2\pi iv}}\right)}_{(*)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{mit } (*) &= 2\pi i\sum_{m,k=1}^{\infty}\left(q^{(4m-2)k}e^{2\pi ikv} - q^{(4m-2)k}e^{-2\pi ikv}\right) \\
&= 2\pi i\sum_{m,k=1}^{\infty}\left(e^{2\pi ikv} - e^{-2\pi ikv}\right)q^{-2k}q^{4mk} \\
&= -4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{4k}}{1-q^{4k}}q^{-2k}\sin 2\pi kv,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{also } f_2(v|\tau) &= \pi\cot\pi v + 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{4k}}{1-q^{4k}}\sin 2\pi kv - 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}}{1-q^{4k}}\sin 2\pi kv \\
&= \pi\cot\pi v - 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}-q^{4k}}{1-q^{4k}}\sin 2\pi kv \\
&= \pi\cot\pi v - 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}\left(1-q^{2k}\right)}{\left(1-q^{2k}\right)\left(1+q^{2k}\right)}\sin 2\pi kv \\
&= \pi\cot\pi v - 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}}{1+q^{2k}}\sin 2\pi kv \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt mit $z = e^{\pi i v}$ und $q = e^{\pi i \tau}$

$$\begin{aligned}
if_2\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\,\tau\right) &= i\pi\cot(\pi v + \pi\tau/2) - 4\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1+q^{2k}} \sin(2\pi k v + \pi k \tau) \\
&= i\pi \frac{\frac{1}{2}\left(zq^{1/2} + z^{-1}q^{-1/2}\right)}{\frac{1}{2i}\left(zq^{1/2} - z^{-1}q^{-1/2}\right)} \\
&\quad - 4\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1+q^{2k}} \frac{1}{2i}\left(z^{2k}q^{k} - z^{-2k}q^{-k}\right) \\
&= \pi \frac{1+z^2q}{1-z^2q} - 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1+q^{2k}} \left(z^{2k}q^{k} - z^{-2k}q^{-k}\right) \\
&= \pi + 2\pi \frac{z^2q}{1-z^2q} + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k}}{1+q^{2k}} \left(z^{-2k} - z^{2k}q^{2k}\right) \\
&= \pi + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(z^{2k}q^{k} + \frac{q^{k}}{1+q^{2k}} \left(z^{-2k} - z^{2k}q^{2k}\right)\right) \\
&= \pi + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k}}{1+q^{2k}} \left(z^{2k}\left(1+q^{2k}\right) + \left(z^{-2k} - z^{2k}q^{2k}\right)\right) \\
&= \pi + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k}}{1+q^{2k}} \cos 2\pi k v \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Daher sind die Formeln für die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
if_2^{(2)}\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\,\tau\right) &= -16\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 q^m}{1+q^{2m}} \cos 2m\pi v \\
if_2^{(4)}\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\,\tau\right) &= 64\pi^5 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^4 q^m}{1+q^{2m}} \cos 2m\pi v \\
if_2^{(6)}\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\,\tau\right) &= -256\pi^7 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^6 q^m}{1+q^{2m}} \cos 2m\pi v \\
if_2^{(8)}\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\,\tau\right) &= 1024\pi^9 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^8 q^m}{1+q^{2m}} \cos 2m\pi v
\end{aligned}$$

...und an der Stelle $v = 0$:

$$if_2^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right) = -16\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 q^m}{1+q^{2m}} \tag{3.10a}$$

$$if_2^{(4)}\left(\frac{\tau}{2}\right) = 64\pi^5 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^4 q^m}{1+q^{2m}} \tag{3.10b}$$

$$if_2^{(6)}\left(\frac{\tau}{2}\right) = -256\pi^7 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^6 q^m}{1+q^{2m}} \tag{3.10c}$$

$$if_2^{(8)}\left(\frac{\tau}{2}\right) = 1024\pi^9 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^8 q^m}{1+q^{2m}} \tag{3.10d}$$

3.3 Lambert-Reihen von $\left(f_\alpha^2\right)^{(2k)}\left(\frac{1}{2}\right)$

Die f_α^2 sind elliptische Funktionen zweiter Ordnung zum Gitter $L_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. Ihre Laurententwicklung um $v = 0$ fängt mit $1/v^2$ an.

Nun rufen wir uns die Funktion $\Phi(v|\tau) = \vartheta_1'(v|\tau)/\vartheta_1(v|\tau)$ aus Gleichung (3.1) in Erinnerung. Aus der Gleichung (3.2) folgt für die Ableitung von Φ:

$$\Phi'(v+1|\tau) = \Phi'(v+\tau|\tau) = \Phi'(v|\tau),$$

also ist $\Phi'(v)$ eine elliptische Funktion mit Perioden 1 und τ. Explizit gilt:

$$\Phi'(v|\tau) = \frac{d^2}{dv^2}\log\vartheta_1(v) = \frac{\vartheta_1''(v)}{\vartheta_1(v)} - \left(\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}\right)^2$$

Also hat diese Funktion Pole zweiter Ordnung im Nullpunkt (mod 1,τ), die Laurententwicklung beginnt mit $-1/v^2$. Folglich ist die Summe $f_\alpha^2 + \Phi'$ eine elliptische Funktion ohne Pole, also konstant:

$$f_\alpha^2(v|\tau) = -\frac{d^2}{dv^2}\log\vartheta_1(v) + C_\alpha \tag{3.11}$$

In (3.11) können wir jetzt die Produktdarstellung (1.9) von $\vartheta_1(v)$ einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}
f_\alpha^2(v|\tau) &= -\frac{d}{dv}\left\{\pi\cot\pi v + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2\pi i q^{2m}e^{2\pi iv}}{1-q^{2m}e^{2\pi iv}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\pi i q^{2m}e^{-2\pi iv}}{1-q^{2m}e^{-2\pi iv}}\right\} + C_\alpha \\
&= -\frac{d}{dv}\left\{\pi\cot\pi v - 2\pi i\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{2mk}\left(e^{2\pi ikv} - e^{-2\pi ikv}\right)\right\} + C_\alpha \\
&= -\frac{d}{dv}\left\{\pi\cot\pi v + 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}\sin 2\pi kv\right\} + C_\alpha \\
&= \frac{\pi^2}{\sin^2\pi v} - 8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kq^{2k}}{1-q^{2k}}\cos 2\pi kv + C_\alpha
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Nun müssen wir wieder die zweite, vierte, sechste, achte Ableitung dieser Gleichung berechnen, zunächst die Ableitungen von $j(v) := \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi v}$ bei $v = 1/2$:

$$\begin{aligned} j(1/2+\delta) &= \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi\delta} \\ &= \pi^2 \left(1 + 2\frac{(\pi\delta)^2}{2!} + 16\frac{(\pi\delta)^4}{4!} + 272\frac{(\pi\delta)^6}{6!} + 7936\frac{(\pi\delta)^8}{8!}\right) \end{aligned}$$

Bei $v = 1/2$, d.h. $\delta = 0$, lesen wir ab:

$$j^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi^4, \quad j^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = 16\pi^6, \quad j^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right) = 272\pi^8, \quad j^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) = 7936\pi^{10}.$$

Nun Ableitungen der Gleichung (3.12):

$$\begin{aligned} \left(f_\alpha^2\right)^{(2)}(v|\tau) &= \frac{d^2}{dv^2}\left(j(v) + C_\alpha - 8\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} \cos 2\pi m v\right) \\ &= j^{(2)}(v) + 32\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 q^{2m}}{1-q^{2m}} \cos 2m\pi v \\ \left(f_\alpha^2\right)^{(4)}(v|\tau) &= j^{(4)}(v) - 128\pi^6 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^5 q^{2m}}{1-q^{2m}} \cos 2m\pi v \\ \left(f_\alpha^2\right)^{(6)}(v|\tau) &= j^{(6)}(v) + 512\pi^8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^7 q^{2m}}{1-q^{2m}} \cos 2m\pi v \\ \left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(v|\tau) &= j^{(8)}(v) - 2048\pi^{10} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^9 q^{2m}}{1-q^{2m}} \cos 2m\pi v \end{aligned}$$

Hieraus folgt an der Stelle $v = \frac{1}{2}$:

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi^4 + 32\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^3 q^{2m}}{1-q^{2m}} \tag{3.13a}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = 16\pi^6 - 128\pi^6 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^5 q^{2m}}{1-q^{2m}} \tag{3.13b}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right) = 272\pi^8 + 512\pi^8 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^7 q^{2m}}{1-q^{2m}} \tag{3.13c}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) = 7936\pi^{10} - 2048\pi^{10} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m^9 q^{2m}}{1-q^{2m}} \tag{3.13d}$$

3.4 Lambert-Reihen von $\left(f_\alpha^2\right)^{(2k)}\left(\frac{\tau}{2}\right)$

Zuerst bilden wir mit der Notation $z = e^{\pi i v}$, $q = e^{\pi i \tau}$, $x = z^2 q$

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi(v+\tau/2)} &= \frac{-4\pi^2}{\left(zq^{1/2} - z^{-1}q^{-1/2}\right)^2} = -4\pi^2 \frac{z^2 q}{\left(1 - z^2 q\right)^2} = -4\pi^2 \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= -4\pi x \frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = -4\pi x \frac{d}{dx}\sum_{m=1}^{\infty} x^m = -4\pi \sum_{m=1}^{\infty} m x^m\end{aligned}$$

Formel (3.12) besagt:

$$f_\alpha^2(v|\tau) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi v} + C_\alpha - 8\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} \cos 2\pi m v$$

Also ist

$$\begin{aligned}f_\alpha^2\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\, \tau\right) &= C_\alpha - 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} m\left(z^2 q\right)^m - 4\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\left(z^{2m}q^m + z^{-2m}q^{-m}\right) \\ &= C_\alpha - 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} m z^{2m} q^m \left(1 + \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\right) - 4\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} z^{-2m} q^{-m} \\ &= C_\alpha - 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} m z^{2m} q^m \frac{1}{1-q^{2m}} - 4\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^{2m}} z^{-2m} \\ &= C_\alpha - 8\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^{2m}} \cos 2\pi m v \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Ableitungen von Gleichung (3.14):

$$\begin{aligned}\left(f_\alpha^2\right)^{(2)}\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\, \tau\right) &= \frac{d^2}{dv^2}\left(C_\alpha - 8\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^{2m}} \cos 2\pi m v\right) \\ &= 32\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 q^m}{1-q^{2m}} \cos 2m\pi v \\ \left(f_\alpha^2\right)^{(4)}\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\, \tau\right) &= -128\pi^6 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^5 q^m}{1-q^{2m}} \cos 2m\pi v \\ \left(f_\alpha^2\right)^{(6)}\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\, \tau\right) &= 512\pi^8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^7 q^m}{1-q^{2m}} \cos 2m\pi v \\ \left(f_\alpha^2\right)^{(8)}\left(v + \frac{\tau}{2}\middle|\, \tau\right) &= -2048\pi^{10} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^9 q^m}{1-q^{2m}} \cos 2m\pi v\end{aligned}$$

Hiermit folgt für $v=0$:

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(2)}\left(\frac{\tau}{2}\right)=32\pi^4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3q^m}{1-q^{2m}} \tag{3.15a}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(4)}\left(\frac{\tau}{2}\right)=-128\pi^6\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^5q^m}{1-q^{2m}} \tag{3.15b}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(6)}\left(\frac{\tau}{2}\right)=512\pi^8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^7q^m}{1-q^{2m}} \tag{3.15c}$$

$$\left(f_\alpha^2\right)^{(8)}\left(\frac{\tau}{2}\right)=-2048\pi^{10}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^9q^m}{1-q^{2m}} \tag{3.15d}$$

3.5 Einige Formeln und Schreibweisen

Notation: $\delta=n/d$, falls $d|n$. Die folgende Formel wird bei 2, 6, 10, 14, 18 Quadraten verwendet:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^tq^m}{1+q^{2m}}&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}m^tq^{-m}q^{2mk}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}m^tq^{m(2k-1)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sum_{\substack{d|n\\ \delta=2k-1}}(-1)^{k-1}d^t\\&=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sum_{\substack{d|n\\ \delta\equiv1(2)}}(-1)^{\delta/2-1/2}d^t=:\sum_{n=1}^{\infty}E_t'(n)q^n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_t'(n)=\sum_{\substack{d|n\\ \delta\equiv1(2)}}(-1)^{\delta/2-1/2}d^t=\sum_{\substack{d|n\\ \delta\equiv1(4)}}d^t-\sum_{\substack{d|n\\ \delta\equiv3(4)}}d^t \tag{3.16}$$

Diese Formel wird bei 6, 10, 14, 18 Quadraten verwendet:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)^tq^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(2m-1)^tq^{(2m-1)k}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sum_{\substack{d|n\\ d=2m-1}}(-1)^{m-1}d^t\\&=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sum_{\substack{d|n\\ d\equiv1(2)}}(-1)^{d/2-1/2}d^t=:\sum_{n=1}^{\infty}E_t(n)q^n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_t(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1(2)}} (-1)^{d/2-1/2} d^t = \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1(4)}} d^t - \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 3(4)}} d^t \tag{3.17}$$

Diese Formel wird bei 8, 16 Quadraten verwendet:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^t q^m}{1-(-q)^m} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^m m^t (-q)^{mk} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{mk-m} m^t q^{mk} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_{d|n}(-1)^{n-d} d^t =: \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta_t(n) q^n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \zeta_t(n) = \sum_{d|n}(-1)^{d-1} d^t \tag{3.18}$$

Diese Formel wird bei 12, 20 Quadraten verwendet:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^t q^m}{1+(-q)^m} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^m (-1)^{k-1} m^t (-q)^{mk} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{mk-m+k-1} m^t q^{mk} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} q^n (-1)^{n-1} \sum_{d|n}(-1)^{d+\delta} d^t =: \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\xi_t(n) q^n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \xi_t(n) = \sum_{d|n}(-1)^{d+\delta} d^t \tag{3.19}$$

4 Zwei bis Acht Quadrate

4.1 Zwei Quadrate

Aus der „Linearkombination“ (2.18) entnehmen wir $\pi\vartheta_3^2 = f_4\left(\frac{1}{2}\right)$. Nun zur Erinnerung Gleichung (3.3): $f_4(v|\tau) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{v+1}{2}\middle|\frac{\tau}{2}\right)$. Wir müssen nun mit Hilfe von Gleichung (3.4) q-Entwicklungen von $\Phi\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right)$ und $\Phi\left(\frac{3}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right) &= \pi + 2\pi i \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-iq^m}{1-iq^m} + \frac{-iq^m}{1+iq^m}\right) \\
&= \pi + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^m}{1-iq^m} + \frac{q^m}{1+iq^m}\right) \\
&= \pi + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m(1+iq^m) + q^m(1-iq^m)}{(1-iq^m)(1+iq^m)} \\
&= \pi + 4\pi \sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}
\end{aligned}$$

und analog, man vergleiche den folgenden Ausdruck mit dem obigen,

$$\Phi\left(\frac{3}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right) = -\pi + 2\pi i \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{iq^m}{1-iq^m} + \frac{-iq^m}{1+iq^m}\right) = -\Phi\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right)$$

Dies können wir jetzt direkt einsetzen

$$\begin{aligned}
\vartheta_3^2 = \frac{f_4\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi} &= \frac{\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{3}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\Phi\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{\tau}{2}\right) \\
&= 1 + 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}
\end{aligned}$$

Nun können wir Formel (3.16) einsetzen:

$$\begin{aligned}
A_2(n) = 4E_0'(n) &= 4\sum_{\substack{d|n \\ \delta\equiv 1(2)}}(-1)^{\delta/2-1/2}d^0 = 4\sum_{\substack{d|n \\ \delta\equiv 1(2)}}(-1)^{\delta/2-1/2}\delta^0 \\
&= 4\sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1(2)}}(-1)^{d/2-1/2} = 4E_0(n) = 4\sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 3(4)}}1 - 4\sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1(4)}}1
\end{aligned}$$

Also ist $A_2(n)$ vier mal der Überschuss der Teiler von der Form $4k+3$ über die der Form $2k+1$, was unter anderem heißt, weil $A_2(n) \geq 0$, dass es mehr von der ersten als von der zweiten Form gibt.

4.2 Vier Quadrate

Aus der „Linearkombination“ (2.19) entnehmen wir auch $\pi^2 \vartheta_3^4 = f_4^2\left(\frac{1}{2}\right)$.

Weil $f_2\left(\frac{1}{2}\middle|\,\tau\right) = 0$, folgt mit Gleichung (1.21) bei $v = \frac{1}{2}$:

$$f_4^2\left(\frac{1}{2}\right) = f_4^2\left(\frac{1}{2}\middle|\,\tau\right) - f_2^2\left(\frac{1}{2}\middle|\,\tau\right) = C_{42} = -4\pi^2 q \frac{d}{dq} \log \frac{\vartheta_4(0,q)}{\vartheta_2(0,q)}$$

Nun verwenden wir die Produktdarstellung der ϑ-Null-Werte aus (1.10):

$$\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_4(0,q)} = 2q^{1/4} \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{2m}\right)^2}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m-1}\right)^2} = 2q^{1/4} \frac{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{4m}\right)^2}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{m}\right)^2}$$

Hier wurde im letzten Schritt mit $\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)^2$ erweitert. [Bemerkung: Wenn man diesen Schritt wegließe, könnte man eine andere Formel herleiten, die natürlich dieselben Werte hat, aber schwerer zu berechnen ist: $A_4(n) = 8(-1)^{n-1}\xi_1(n)$]

Es folgt die Lambertreihe von ϑ_3^4

$$\begin{aligned}
\vartheta_3^4 &= \frac{1}{\pi^2} f_4^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi^2} C_{42} = 4q \frac{d}{dq} \log \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_4(0,q)} && (4.1)\\
&= 4q\left(\frac{1}{4q} + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{m-1}}{1-q^m} - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4mq^{4m-1}}{1-q^{4m}}\right)\\
&= 1 + 8\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^m} - 8\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4mq^{4m}}{1-q^{4m}}\\
&= 1 + 8\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\not\equiv 0(4)}} \frac{mq^m}{1-q^m} = 1 + 8\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\not\equiv 0(4)}} \sum_{k=1}^{\infty} mq^{mk}\\
&= 1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d|n\\ d\not\equiv 0(4)}} d\right) q^n && (4.2)
\end{aligned}$$

Also ist $A_4(n)$ acht mal die Summe der Teiler, die nicht durch vier teilbar sind:

$$A_4(n) = 8 \sum_{\substack{d|n\\ d\not\equiv 0(4)}} d$$

Weil insbesondere immer 1 ein Teiler von n ist, der nicht durch vier teilbar ist, gilt $A_4(n) \geq 8$, also ist der Satz von Lagrange bewiesen, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadraten darstellen lässt. Dieser Satz wurde 1621 von Claude Gaspard Bachet de Méziriac vermutet und 1770 von Joseph Louis Lagrange bewiesen.

4.3 Sechs Quadrate

Wenn wir die beiden Lambert-Reihen aus den Gleichungen (3.7a) und (3.10a) übernehmen und in die Linearkombination aus (2.20) einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\vartheta_3^6 &= \frac{1}{\pi^3}\left(f_4''\left(\frac{1}{2}\right) - if_2''\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\\ &= 1 - 4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)^2q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} + 16\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2q^m}{1+q^{2m}}\end{aligned}$$

jetzt können wir die Formeln (3.16) und (3.17) einsetzen:

$$\begin{aligned}A_6(n) &= 16E_2'(n) - 4E_2(n)\\ &= 16\left(\sum_{\substack{d|n\\ \delta\equiv 1(4)}} d^2 - \sum_{\substack{d|n\\ \delta\equiv 3(4)}} d^2\right) - 4\left(\sum_{\substack{d|n\\ d\equiv 1(4)}} d^2 - \sum_{\substack{d|n\\ d\equiv 3(4)}} d^2\right)\end{aligned}$$

4.4 Acht Quadrate

Um ϑ_3^8 und somit $A_8(n)$ zu berechnen, müssen wir die beiden Reihen (3.13a) und (3.15a) in die Linearkombination (2.21) einsetzen:

$$\begin{aligned}\vartheta_3^8 &= \frac{1}{2\pi^4}\left((f_\alpha^2)''\left(\frac{1}{2}\right) + (f_\alpha^2)''\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)\\ &= 1 + 16\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m^3q^{2m}}{1-q^{2m}} + 16\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3q^m}{1-q^{2m}}\\ &= 1 + 16\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3q^m}{1-(-q)^m}\end{aligned}$$

Nun kann man Formel (3.18) einsetzen:

$$A_8(n) = 16(-1)^{n-1}\zeta_3(n) = 16\sum_{d|n}(-1)^{n-d}d^3$$

4.5 Wertetabellen

Hier findet sich nun für $n \leq 20$ eine Liste der Teiler von n, sowie der Teilerfunktionen und der Anzahlformeln bis acht Quadrate:

Tabelle 4.1: Wertetabelle zwei bis acht Quadrate

n	Teiler	E_0	A_2	ξ_1	A_4	E_2	E_2'	A_6	ζ_3	A_8
1	1	1	4	1	8	1	1	12	1	16
2	1, 2	1	4	–3	24	1	4	60	–7	112
3	1, 3	0	0	4	32	–8	8	160	28	448
4	1, 2, 4	1	4	–3	24	1	16	252	–71	1136
5	1, 5	2	8	6	48	26	26	312	126	2016
6	1, 2, 3, 6	0	0	–12	96	–8	32	544	–196	3136
7	1, 7	0	0	8	64	–48	48	960	344	5504
8	1, 2, 4, 8	1	4	–3	24	1	64	1020	–583	9328
9	1, 3, 9	1	4	13	104	73	73	876	757	12112
10	1, 2, 5, 10	2	8	–18	144	26	104	1560	–882	14112
11	1, 11	0	0	12	96	–120	120	2400	1332	21312
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	0	0	–12	96	–8	128	2080	–1988	31808
13	1, 13	2	8	14	112	170	170	2040	2198	35168
14	1, 2, 7, 14	0	0	–24	192	–48	192	3264	–2408	38528
15	1, 3, 5, 15	0	0	24	192	–208	208	4160	3528	56448
16	1, 2, 4, 8, 16	1	4	–3	24	1	256	4092	–4679	74864
17	1, 17	2	8	18	144	290	290	3480	4914	78624
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	1	4	–39	312	73	292	4380	–5299	84784
19	1, 19	0	0	20	160	–360	360	7200	6860	109760
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	2	8	–18	144	26	416	6552	–8946	143136

5 Explizite Formeln der Restglieder

Es ist z.B. $q\frac{d}{dq}\vartheta_3 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 q^{n^2}$. In sämtlichen expliziten Formeln für die Restglieder werden solche Ableitungen von ϑ-Null-Werten vorkommen. Wir werden deshalb eine geschlossene Formel für deren Ableitungen angeben, wobei diese die Verwendung der alternativen Notation aus Kapitel 1.6.3 erfordert, welche auch Glaisher, siehe [Gla9], verwendete.

Jedoch werden nur Gleichungen (5.25) bis (5.30) später noch benötigt, in ihnen kommt die Notation aus Jacobi's Fundamenta Nova nicht mehr vor – diese wird lediglich für den Beweis eben dieser Gleichungen verwendet.

5.1 Vorarbeit

Im Kapitel über vier Quadrate haben wir Gleichung (4.1) hergeleitet:

$$\vartheta_3^4 = 4q\frac{d}{dq}\log\frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_4(0,q)}$$

Hier setzen wir jetzt die Produktentwicklung von ϑ_2 und ϑ_4 aus (1.10) ein, was sich durch den Logarithmus in eine Summe transformiert:

$$\begin{aligned}
\vartheta_3^4 &= 4q\frac{d}{dq}\log\frac{2q^{1/4}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1+q^{2m}\right)^2}{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)\left(1-q^{2m-1}\right)^2}\\
&= 4q\frac{d}{dq}\left\{\log 2+\frac{1}{4}\log q+2\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(1+q^{2m}\right)-2\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(1-q^{2m-1}\right)\right\}\\
&= 1+8q\frac{d}{dq}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\log\left(1+(-q)^m\right)\\
&= 1+8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^m}{1+(-q)^m}
\end{aligned}$$

Mit $q\to -q$ (siehe hierzu das Transformationsverhalten, Kap. 1.7) geht dies über in:

$$\vartheta_4^4 = 1+8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m(-q)^m}{1+q^m}$$

Aus der Produktdarstellung von ϑ_2 und ϑ_3 folgt nun die Produktdarstellung von $k := \vartheta_2^2/\vartheta_3^2$, und somit die Summendarstellung von $\log k$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
2q\frac{d}{dq}\log k &= 2q\frac{d}{dq}\log\frac{4q^{1/2}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)^2\left(1+q^{2m}\right)^4}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})^2(1+q^{2m-1})^4} \\
&= 2q\frac{d}{dq}\left\{\log 4 + \frac{1}{2}\log q + 4\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(1+q^{2m}\right) - 4\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(1+q^{2m-1}\right)\right\} \\
&= 1 + 8q\frac{d}{dq}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\log\left(1+q^m\right) \\
&= 1 + 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m(-q)^m}{1+q^m} = \vartheta_4^4 = \frac{2q\frac{d}{dq}k}{k}
\end{aligned}$$

Folglich gilt die folgende Formel, die das Ziel unserer Vorarbeit ist:

$$q\frac{dk}{dq} = \frac{k}{2}\vartheta_4^4 \tag{5.1}$$

5.2 Ableitungen der ϑ-Null-Werte

Für dieses Kapitel verwenden wir, wie Glaisher, die Notation von Jacobi's *Fundamenta Nova*:

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
J &= \int_0^1 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
E &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
G &= \int_0^1 \frac{k^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}dx
\end{aligned}$$

wobei der folgende Zusammenhang zu den ϑ-Funktionen gilt (siehe (1.27)):

$$k = \vartheta_2^2/\vartheta_3^2 \qquad k' = \vartheta_4^2/\vartheta_3^2 \qquad 2K/\pi = \rho = \vartheta_3^2 \qquad k^2 + k'^2 = 1 \tag{5.3}$$

Es gelten folgende Relationen, die wir aus den Integraldefinitionen ablesen:

$$E + J = K, \qquad E - G = k'^2K, \qquad J + G = k^2K \tag{5.4}$$

Aus den Integraldarstellungen folgt durch Differentiation:

$$\frac{dK}{dk} = \frac{G}{kk'^2} \qquad \frac{dE}{dk} = \frac{-J}{k} \qquad \frac{dJ}{dk} = \frac{kE}{k'^2} \qquad \frac{dG}{dk} = kK \tag{5.5}$$

Mit Formel (5.1) folgt:

$$q\frac{dk}{dq} = \frac{k}{2}\vartheta_4^4 = \frac{k(k'\rho)^2}{2} = \frac{2kk'^2K^2}{\pi^2} \tag{5.6}$$

Aus der Jacobi'schen Thetarelation $k^2+k'^2 = 1$ folgt nun: $kdk = -k'dk'$ oder $dk'/dk = -k/k'$, also mit Gleichung (5.6):

$$q\frac{dk'}{dq} = q\frac{dk}{dq}\frac{dk'}{dk} = -\frac{2k^2k'K^2}{\pi^2}$$

Es folgt mit (5.6) und (5.5):

$$\begin{aligned}
q\frac{dK}{dq} &= \frac{dK}{dk}q\frac{dk}{dq} = \frac{G}{kk'^2}\frac{2kk'^2K^2}{\pi^2} = \frac{2K^2G}{\pi^2} \\
q\frac{dE}{dq} &= \frac{dE}{dk}q\frac{dk}{dq} = \frac{-J}{k}\frac{2kk'^2K^2}{\pi^2} = -\frac{2k'^2K^2J}{\pi^2} \\
q\frac{dJ}{dq} &= \frac{dJ}{dk}q\frac{dk}{dq} = \frac{kE}{k'^2}\frac{2kk'^2K^2}{\pi^2} = \frac{2k^2K^2E}{\pi^2} \\
q\frac{dG}{dq} &= \frac{dG}{dk}q\frac{dk}{dq} = kK\frac{2kk'^2K^2}{\pi^2} = \frac{2k^2k'^2K^3}{\pi^2}
\end{aligned}$$

Setze zur Verkürzung der Notation $\lambda := 2K^2/\pi^2$. Dann lauten obige Gleichungen:

$$q\frac{d}{dq}k = \lambda kk'^2 \qquad q\frac{d}{dq}K = \lambda G \qquad q\frac{d}{dq}J = \lambda k^2E \tag{5.8a}$$

$$q\frac{d}{dq}k' = -\lambda k'k^2 \qquad q\frac{d}{dq}E = -\lambda k'^2J \qquad q\frac{d}{dq}G = \lambda k^2k'^2K \tag{5.8b}$$

Wir haben jetzt alle Ableitungen von k, k', K, J, E, G wieder durch die k, k', K, J, E, G dargestellt. Dies fassen wir zu einer allgemeinen Formel zusammen:

$$\begin{aligned}
u &:= k^mk'^nK^rE^\alpha J^\beta G^\gamma \\
\log u &= m\log k + n\log k' + r\log K + \alpha\log E + \beta\log J + \gamma\log G
\end{aligned}$$

Hiervon lässt sich die Ableitung angeben:

$$q\frac{d}{dq}\log u = \lambda\left\{mk'^2 - nk^2 + rG/K - \alpha k'^2J/E + \beta k^2E/J + \gamma k^2k'^2K/G\right\}$$

Dann setzen wir die Gleichungen $k^2 = (J+G)/K$ und $k'^2 = (E-G)/K$ (siehe (5.4)) ein:

$$\begin{aligned}
q\frac{d}{dq}u = \lambda u/K\,\{&m(E-G) - n(J+G) + rG \\
&-\alpha(E-G)J/E + \beta(J+G)E/J + \gamma(J+G)(E-G)/G\} \\
= \frac{2Ku}{\pi^2}\,\{&(m+\beta+\gamma)E - (n+\alpha+\gamma)J - (m+n-r+\gamma)G \\
&+\alpha\frac{JG}{E} + \beta\frac{GE}{J} + \gamma\frac{EJ}{G}\Big\}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Nun noch eine andere Darstellungsmöglichkeit dieser Formel, mit der folgenden Notation:

$$\rho = \frac{2K}{\pi}, \qquad e = \frac{4KE}{\pi^2}, \qquad g = \frac{4KG}{\pi^2}, \qquad j = \frac{4KJ}{\pi^2}$$

Dann sind die Relationen (5.4):

$$e + j = \rho^2 \qquad e - g = k'^2\rho^2, \qquad j + g = k^2\rho^2 \tag{5.10}$$

Außerdem ist:

$$K = \frac{\pi}{2}\rho, \qquad E = \frac{\pi}{2}\frac{e}{\rho}, \qquad G = \frac{\pi}{2}\frac{g}{\rho}, \qquad J = \frac{\pi}{2}\frac{j}{\rho} \tag{5.11}$$

Mit $\lambda = 2K^2/\pi^2 = \frac{1}{2}\rho^2$ lauten obige Ableitungen (5.8a), notiert mit Hilfe des Differentialoperator $D := 2q\frac{d}{dq}$:

$$D(k) = \rho^2 kk'^2 \qquad D(K) = \rho^2 G \qquad D(J) = \rho^2 k^2 E \tag{5.12a}$$

$$D(k') = -\rho^2 k'k^2 \qquad D(E) = -\rho^2 k'^2 J \qquad D(G) = \rho^2 k^2 k'^2 K \tag{5.12b}$$

Nun sind noch $D(\rho), D(j), D(e), D(g)$ zu berechnen. Setze hierzu (5.11) in (5.12) ein:

$$\begin{aligned} D(\rho) &= \rho g & D(j/\rho) &= \rho k^2 e \\ D(e/\rho) &= -\rho k'^2 j & D(g/\rho) &= \rho^3 k^2 k'^2 \end{aligned}$$

Die letzten drei dieser Gleichungen liefern mit Hilfe der ersten:

$$\begin{aligned} D(j/\rho) &= \frac{D(j)}{\rho} - j\frac{D(\rho)}{\rho^2} = \frac{D(j)}{\rho} - \frac{jg}{\rho} = \rho k^2 e \\ D(e/\rho) &= \frac{D(e)}{\rho} - e\frac{D(\rho)}{\rho^2} = \frac{D(e)}{\rho} - \frac{eg}{\rho} = -\rho k'^2 j \\ D(g/\rho) &= \frac{D(g)}{\rho} - g\frac{D(\rho)}{\rho^2} = \frac{D(g)}{\rho} - \frac{g^2}{\rho} = \rho^3 k^2 k'^2 \end{aligned}$$

Also ist

$$D(j) - jg = \rho^2 k^2 e, \qquad D(e) - eg = -\rho^2 k'^2 j \qquad D(g) - g^2 = \rho^4 k^2 k'^2$$

Und insgesamt:

$$\begin{aligned} D(k) &= \rho^2 kk'^2 & D(\rho) &= \rho g & D(j) &= \rho^2 k^2 e + jg \\ D(k') &= -\rho^2 k'k^2 & D(e) &= -\rho^2 k'^2 j + eg & D(g) &= \rho^4 k^2 k'^2 + g^2 \end{aligned}$$

Schließlich definieren wir allgemein

$$
\begin{aligned}
u &= k^m k'^n \rho^r e^\alpha j^\beta g^\gamma \\
\log u &= m \log k + n \log k' + r \log \rho + \alpha \log e + \beta \log j + \gamma \log g \\
D(\log u) = \frac{D(u)}{u} &= m\rho^2 k'^2 - n\rho^2 k^2 + rg \\
&\quad - \alpha \frac{\rho^2 k'^2 j}{e} + \alpha g + \beta \frac{\rho^2 k^2 e}{j} + \beta g + \gamma \frac{\rho^4 k^2 k'^2}{g} + \gamma g
\end{aligned}
$$

Und mit den Relationen (5.10):

$$
\begin{aligned}
\frac{D(u)}{u} &= m(e-g) - n(j+g) + (r+\alpha+\beta+\gamma)g \\
&\quad - \ \alpha \frac{(e-g)j}{e} + \beta \frac{(j+g)e}{j} + \gamma \frac{(j+g)(e-g)}{g} \\
&= (m+\beta+\gamma)e + (r-m-n+\alpha+\beta)g + (-n-\alpha-\gamma)j \\
&\quad \alpha \frac{gj}{e} + \beta \frac{ge}{j} + \gamma \frac{je}{g}
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
2q\frac{d}{dq} k^m k'^n \rho^r e^\alpha j^\beta g^\gamma = k^m k'^n \rho^r \{ &(m+\beta+\gamma) e^{\alpha+1} j^\beta g^\gamma \\
&+ (r-m-n+\alpha+\beta) e^\alpha j^\beta g^{\gamma+1} - (n+\alpha+\gamma) e^\alpha j^{\beta+1} g^\gamma \\
&+ \alpha e^{\alpha-1} j^{\beta+1} g^{\gamma+1} + \beta e^{\alpha+1} j^{\beta-1} g^{\gamma+1} + \gamma e^{\alpha+1} j^{\beta+1} g^{\gamma-1} \}
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

5.3 Restgliedformeln

Obige Formel ist mit $m = n = 0$:

$$
\begin{aligned}
D(\rho^r e^\alpha j^\beta g^\gamma) = \rho^r \{ &(\beta+\gamma) e^{\alpha+1} j^\beta g^\gamma + (r+\alpha+\beta) e^\alpha j^\beta g^{\gamma+1} - (\alpha+\gamma) e^\alpha j^{\beta+1} g^\gamma \\
&+ \alpha e^{\alpha-1} j^{\beta+1} g^{\gamma+1} + \beta e^{\alpha+1} j^{\beta-1} g^{\gamma+1} + \gamma e^{\alpha+1} j^{\beta+1} g^{\gamma-1} \}
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

Wir benötigen nun die ersten vier Ableitung von $\vartheta_3(q) = \rho^{1/2}$.

$$
\begin{aligned}
2D(\rho^{1/2}) &= 2^2 \sum n^2 q^{n^2} = \rho^{1/2}\{g\} \\
2^2 D^2(\rho^{1/2}) &= 2^4 \sum n^4 q^{n^2} = \rho^{1/2}\{2eg + g^2 + 2ej - 2gj\} \\
2^3 D^3(\rho^{1/2}) &= 2^6 \sum n^6 q^{n^2} = \rho^{1/2}\{8e^2 g + 6eg^2 + g^3 + 8e^2 j - 2egj - 6g^2 j - 8ej^2 + 8gj^2\} \\
2^4 D^4(\rho^{1/2}) &= 2^8 \sum n^8 q^{n^2} = \rho^{1/2}\{32e^3 g + 60e^2 g^2 + 12eg^3 + g^4 + 32e^3 j - 8e^2 gj \\
&\quad - 12eg^2 j - 12g^3 j - 68e^2 j^2 + 8egj^2 + 60g^2 j^2 + 32ej^3 - 32gj^3\}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Relationen (5.10) lassen sich in den Termen e und j eliminieren:

$$
\begin{aligned}
S_0 &:= 2^0 \sum n^0 q^{n^2} = \rho^{1/2} \\
S_2 &:= 2^2 \sum n^2 q^{n^2} = \rho^{1/2}\{g\} \\
S_4 &:= 2^4 \sum n^4 q^{n^2} = \rho^{1/2}\{3g^2 + 2k^2k'^2\rho^4\} \\
S_6 &:= 2^6 \sum n^6 q^{n^2} = \rho^{1/2}\{15g^3 + 30gk^2k'^2\rho^4 + 8k^2k'^2(k'^2 - k^2)\rho^6\} \\
S_8 &:= 2^8 \sum n^8 q^{n^2} = \rho^{1/2}\{105g^4 + 420g^2k^2k'^2\rho^4 \\
&\qquad + 224gk^2k'^2(k'^2 - k^2)\rho^6 + (32k^2k'^2 - 132k^4k'^4)\rho^8\}
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt:

$$S_4S_0 - 3S_2^2 = 2k^2k'^2\rho^5 = 2\vartheta_2^4\vartheta_3^2\vartheta_4^4 \tag{5.19}$$

$$S_4S_0^3 - 3S_2^2S_0^2 = 2k^2k'^2\rho^6 = 2\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4 \tag{5.20}$$

$$S_6S_0^3 - 15S_4S_2S_0^2 + 30S_2^3S_0 = 8k^2k'^2(k^2 - k'^2)\rho^8 = 8\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4) \tag{5.21}$$

$$S_8S_0 - 28S_6S_2 + 35S_4^2 = 8(4k^2k'^2 + k^4k'^4)\rho^9 = 8(4\vartheta_2^4\vartheta_3^{10}\vartheta_4^4 + \vartheta_2^8\vartheta_3^2\vartheta_4^8) \tag{5.22}$$

$$S_8S_0^3 - 28S_6S_2S_0^2 + 35S_4^2S_0^2 = 8(4k^2k'^2 + k^4k'^4)\rho^{10} = 8(4\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 + \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8) \tag{5.23}$$

$$S_4^2S_0^2 - 6S_4S_2^2S_0 + 9S_2^4 = 4k^4k'^4\rho^8 = 4\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 \tag{5.24}$$

Die erste Gleichung lässt sich nun wie folgt darstellen:

$$
\begin{aligned}
S_4S_0 - 3S_2^2 &= 2^4 \left\{ \left(\sum_a a^4 q^{a^2}\right)\left(\sum_b q^{b^2}\right) - 3\left(\sum_a a^2 q^{a^2}\right)\left(\sum_b b^2 q^{b^2}\right) \right\} \\
&= 16 \sum_{a,b} \left\{a^4 - 3a^2b^2\right\} q^{a^2+b^2} \\
&= 16 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a^2+b^2=n} a^4 - 3a^2b^2 \right) q^n \\
&= 2\vartheta_2^4\vartheta_3^2\vartheta_4^4
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Das ist also eine explizite Formel für die Koeffizienten von $\vartheta_2^4\vartheta_3^2\vartheta_4^4$, in Abhängigkeit der Darstellungsmöglichkeiten von n als Summe zweier Quadrate. Diese Koeffizienten werden wir später bis auf einen Vorfaktor mit $\chi_4(n)$ benennen und im Kapitel über zehn Quadrate verwenden.

Analog dazu berechnen wir die Koeffizienten von $\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4$ in Abhängigkeit der Darstellungsmöglichkeiten von n als Summe von vier Quadraten. Hierzu multiplizieren wir die eben berechnete Gleichung mit $S_0^2 = \sum_{c,d} q^{c^2+d^2}$:

$$
\begin{aligned}
S_4S_0^3 - 3S_2^2S_0^2 &= 2^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^4 - 3a^2b^2 \right) q^n \\
&= 2\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

Diese Koeffizienten werden wir später bis auf einen Vorfaktor mit $\Omega(n)$ benennen und im Kapitel über zwölf Quadrate verwenden.

Die folgenden Koeffizienten werden im Kapitel über 16 Quadrate für die Berechnung von $\Theta(n)$ benötigt:

$$\begin{aligned} S_6S_0^3 - 15S_4S_2S_0^2 + 30S_2^3S_0 &= 2^6 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^6 - 15a^4b^2 + 30a^2b^2c^2 \right) q^n \\ &= 8\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4) \end{aligned} \tag{5.27}$$

und diese im Kapitel über 18 Quadrate für die Berechnung von $\chi_8(n)$:

$$\begin{aligned} S_8S_0 - 28S_6S_2 + 35S_4^2 &= 2^8 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a^2+b^2=n} a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4 \right) q^n \\ &= 8(4\vartheta_2^4\vartheta_3^{10}\vartheta_4^4 + \vartheta_2^8\vartheta_3^2\vartheta_4^8) \end{aligned} \tag{5.28}$$

und diese im Kapitel über 20 Quadrate für die Berechnung von $\chi_8^*(n)$ und $L(n)$:

$$\begin{aligned} S_8S_0^3 - 28S_6S_2S_0^2 + 35S_4^2S_0^2 &= 2^8 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4 \right) q^n \\ &= 8(4\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 + \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8) \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} S_4^2S_0^2 - 6S_4S_2^2S_0 + 9S_2^4 &= 2^8 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^4b^4 - 6a^4b^2c^2 + 9a^2b^2c^2d^2 \right) q^n \\ &= 4\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Die Gleichungen (5.25) bis (5.30) sind nun das Einzige, was wir aus diesem Kapitel 5 übernehmen. In ihnen kommt auch die Notation aus Jacobi's Fundamenta Nova nicht mehr vor, weil eben jene Linearkombinationen der Ableitungen S_k nicht mehr von e, g und j abhängen.

6 Zehn und Zwölf Quadrate

6.1 Zehn Quadrate

Wir setzen die beiden Lambert-Reihen von den Gleichungen (3.7b) und (3.10b) in die Linearkombination (2.22) ein:

$$\begin{aligned}\vartheta_3^{10} &= \frac{1}{5\pi^5}\left(f_4^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) + if_2^{(4)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) + \frac{2}{5}\vartheta_3^2\vartheta_2^4\vartheta_4^4 \\ &= 1 + \frac{4}{5}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{16m^4q^m}{1+q^{2m}} + \frac{4}{5}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)^4q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} + \frac{2}{5}\vartheta_3^2\vartheta_2^4\vartheta_4^4\end{aligned}$$

Dann benennen wir die Koeffizienten des Störterms mit $\chi_4(n)$

$$\vartheta_3^2\vartheta_2^4\vartheta_4^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\chi_4(n)q^n \tag{6.1}$$

$\chi_4(n)$ ist ganzzahlig, da wegen (1.10) in ϑ_2^4 ein Faktor 2^4 auftaucht.
Mit der Gleichung (5.25) folgt:

$$\vartheta_3^2\vartheta_2^4\vartheta_4^4 = 8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{a^2+b^2=n} a^4 - 3a^2b^2\right)q^n = 16\sum_{n=1}^{\infty}\chi_4(n)q^n \tag{6.2}$$

Also ist

$$\chi_4(n) = \frac{1}{2}\sum_{a^2+b^2=n}\left(a^4 - 3a^2b^2\right) = \frac{1}{4}\sum_{a^2+b^2=n}\left(a^4+b^4-6a^2b^2\right) = \frac{1}{4}\sum_{a^2+b^2=n}(a+ib)^4 \tag{6.3}$$

In dieser Darstellung wird auch klar, warum Glaisher diese Funktion χ_4 genannt hat.
Nun kann man die Formeln (3.16) und (3.17) anwenden:

$$\begin{aligned}A_{10}(n) &= \frac{4}{5}\left\{16E_4'(n) + E_4(n) + 8\chi_4(n)\right\} \\ &= \frac{4}{5}\left\{\sum_{\substack{d\mid n\\ \delta\equiv 1(4)}} 16d^4 - \sum_{\substack{d\mid n\\ \delta\equiv 3(4)}} 16d^4 + \sum_{\substack{d\mid n\\ d\equiv 1(4)}} d^4 - \sum_{\substack{d\mid n\\ d\equiv 3(4)}} d^4 + 8\chi_4(n)\right\}\end{aligned}$$

Nun untersuchen wir in Kapitel 6.1.1 noch einige Eigenschaften von $\chi_4(n)$, nämlich dass $\chi_4(2n) = -4\chi_4(n)$ (6.5) und $\chi_4(4n+3) = 0$ (6.8) und geben eine Rekursionsformel für $\chi_4(4n+1)$ an.

6.1.1 Rekursive Berechnungsformel für $\chi_4(n)$

Um zu zeigen, dass $\chi_4(2n) = -4\chi_4(n)$ und $\chi_4(4n+3) = 0$ gilt, sowie um eine rekursive Berechnungsformel für $\chi_4(4n+1)$ herzuleiten, werden wir exzessiv vom Transformationsverhalten der ϑ-Funktionen Gebrauch machen (siehe Kapitel 1.7).

Zur Erinnerung die definierende Gleichung (6.1):

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^2\vartheta_4^4 = 16\sum_{m=1}^{\infty}\chi_4(n)q^n$$

Nun bilde $q \to q^{\frac{1}{2}}$ und teile durch 4:

$$\frac{1}{4}(2\vartheta_2\vartheta_3)^2(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)^2 = \vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^4(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2) = 4\sum_{m=1}^{\infty}\chi_4(n)q^{\frac{1}{2}n}$$

Es folgt durch Addition:

$$\begin{aligned}\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^4 &= 16\sum_{m=1}^{\infty}\chi_4(n)q^n + 4\sum_{m=1}^{\infty}\chi_4(n)q^{\frac{1}{2}n}\\ &= 4\sum_{m=1}^{\infty}\left(4\chi_4(n)+\chi_4(2n)\right)q^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}\end{aligned}$$

Für $q \to -q$ gilt $\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^4 \to i\vartheta_2^2\vartheta_4^4\vartheta_3^4$, es tritt also ein Faktor i auf. Deshalb darf $\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^4$ nur ungerade Potenzen von $q^{\frac{1}{2}}$ enthalten, und es folgt:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = 4\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \tag{6.4}$$

$$4\chi_4(n)+\chi_4(2n) = 0 \tag{6.5}$$

In der ersten dieser Gleichungen nun $q \to -q$ und den Faktor i kürzen:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\chi_4(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \tag{6.6}$$

Nun (6.4) $\pm$ (6.6):

$$2\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(4n+1)q^{\frac{1}{2}(4n+1)} \tag{6.7}$$

$$0 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(4n+3)q^{\frac{1}{2}(4n+3)} \tag{6.8}$$

Wir haben also gezeigt, dass $\chi_4(4n+3) = 0$ ist und dass $\chi_4(2n) = -4\chi_4(n)$ ist. Aus (6.7) leiten wir noch eine rekursive Formel für $\chi_4(4n+1)$ her:

Zuerst $q \to q^{\frac{1}{2}}$ in (6.7) und mit 4 kürzen:

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4^8 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)} \tag{6.9}$$

Dann $q \to -q$ und mit $i^{1/2} = e^{i\pi/4}$ kürzen:

$$\vartheta_2\vartheta_3^8\vartheta_4 = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\chi_4(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)} \tag{6.10}$$

Weil aber $\vartheta_3^8 = 1+16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta_3(n)q^n$ (siehe (11.1d)), folgt die rekursive Formel für $\chi_4(4n+1)$ mit Hilfe von (1.12) nach Erweiterung mit $\frac{1}{2}\vartheta_3$:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\right)}_{\vartheta_3}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\chi_4(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3^8\vartheta_4}\\
&=\underbrace{\left(q^{1/4}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^k q^{k^2+k}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}\underbrace{\left(1+16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta_3(n)q^n\right)}_{\vartheta_3^8}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich vor $q^{\frac{1}{4}(4n+1)} = q^{\frac{1}{4}}q^n$ liefert nach Kürzen mit $(-1)^n$:

$$\begin{aligned}
&\left\{\chi_4(4n+1)+2\sum_{k\geq 1}(-1)^k\chi_4(4n+1-4k^2)\right\}\\
&=-16\left\{\sum_{k\geq 0}(2k+1)(-1)^k\zeta_3(n-(k^2+k))\right\},
\end{aligned}$$

wobei zur Verkürzung der Notation $\zeta_3(0) := -\frac{1}{16}$ gesetzt wurde.

Die ersten Summationsglieder, die zur Berechnung einer Tabelle bis $4n+1 = 61$ reichen, lauten:

$$\begin{aligned}
\chi_4(4n+1) - 2\chi_4(4n+1-4) + 2\chi_4(4n+1-16) - 2\chi_4(4n+1-36)\\
+\,2\chi_4(4n+1-48) = -16\left\{\zeta_3(n) - 3\zeta_3(n-2) + 5\zeta_3(n-6) - 7\zeta_3(n-12)\right\}
\end{aligned}$$

6.2 Zwölf Quadrate

Wir setzen die beiden Reihen (3.13b) und (3.15b) in die Linearkombination (2.23) ein:

$$\begin{aligned}\vartheta_3^{12} &= \frac{1}{16\pi^6}\left(\left(f_\alpha^2\right)^{(iv)}\left(\frac{1}{2}\right) - \left(f_\alpha^2\right)^{(iv)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4 \\ &= 1 - 8\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m^5 q^{2m}}{1-q^{2m}} + 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^5 q^m}{1-q^{2m}} + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4 \\ &= 1 + 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^5 q^m\left(1-(-q)^m\right)}{1-q^{2m}} + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4 \\ &= 1 + 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^5 q^m}{1+(-q)^m} + \vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4\end{aligned}$$

Dann benennen wir die Koeffizienten des Störterms mit $\Omega(n)$

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = \left(\frac{\vartheta_1'}{\pi}\right)^4 = 16q\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)^{12} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\Omega(n)q^n \tag{6.11}$$

Die mittlere Gleichung folgt aus der Produktdarstellung (1.10), hier zeigt sich auch schon $\Omega(2n) = 0$.

Mit Formel (3.19) folgt:

$$A_{12}(n) = 8\left\{(-1)^{n-1}\xi_5(n) + 2\Omega(n)\right\} = 8\left\{(-1)^{n-1}\sum_{d|n}(-1)^{d+\delta}d^5 + 2\Omega(n)\right\}$$

Für $\Omega(n)$ geben wir jetzt eine explizite Formel (6.13) an, zusätzlich geben wir in Kapitel 6.2.2 eine Rekursionsformel für $\Omega(2n+1)$ an (beachte $\Omega(2n) = 0$).

6.2.1 Explizite Darstellung für $\Omega(n)$

Gleichung (5.26) lautet zunächst:

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^4 - 3a^2b^2\right)q^n$$

Also ist nach der Koeffizientendefinition (6.11) von $\Omega(n)$:

$$\Omega(n) = \frac{1}{2}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^4 - 3a^2b^2 \tag{6.12}$$

Man kann $\Omega(n)$ auch mit Hilfe von Quaternionen schreiben:

$$\Omega(n) = \frac{1}{8}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n}(a + i_1 b + i_2 c + i_3 d)^4 \tag{6.13}$$

wobei über alle *Quaternionen* mit Norm $\sqrt{n}$ summiert wird (mit ganzzahligen Koeffizienten vor den Basisvektoren 1, i_1, i_2 und i_3).

Für den Nachweis, dass diese Quaternionenschreibweise die selben Werte liefert, rechnen wir $(a+i_1b+i_2c+i_3d)^4 = a^4 - 6a^2(b^2+c^2+d^2) + (b^2+c^2+d^2)^2 - 4i_1ab(-a^2+b^2+c^2+d^2) - 4i_2ac(-a^2+b^2+c^2+d^2) - 4i_3ad(-a^2+b^2+c^2+d^2)$, also sind die drei Imaginärteile ungerade Funktionen in a. Weil mit (a,b,c,d) auch $(-a,b,c,d)$ ein Quaternion mit Norm n ist, heben sich die Imaginärteile (wie das ja auch zu hoffen war) in der Summation gegenseitig auf. Es folgt:

$$\begin{aligned}\Omega(n) &= \frac{1}{8}\sum\left\{a^4 - 6a^2b^2 - 6a^2c^2 - 6a^2d^2 + b^4 + c^4 + d^4 + 2b^2c^2 + 2c^2d^2 + 2d^2b^2\right\}\\ &= \frac{1}{8}\sum\left\{4a^4 - 12a^2b^2\right\} = \frac{1}{2}\sum\left\{a^4 - 3a^2b^2\right\}\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass mit (a,b,c,d) auch alle Permutationen davon Lösungen sind, und man deshalb beispielsweise eine Summe über b^4 auch als Summe über a^4 schreiben kann.

Wir haben also gezeigt, dass die Funktion $\Omega(n)$, die ursprünglich als Koeffizient definiert wurde, sich durch Quaternionen berechnen lässt:

$$\Omega(n) = \frac{1}{8}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n}(a+i_1b+i_2c+i_3d)^4 = \frac{1}{2}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^4 - 3a^2b^2 \qquad (6.14)$$

6.2.2 Rekursive Berechnungsformel für $\Omega(2n+1)$

Glaisher gibt zur Berechnung von $\Omega(2n+1)$ (beachte $\Omega(2n)=0$) neben der expliziten Formel auch eine rekursive an, die nicht so schön ist, aber schneller zur Berechnung von Wertetabellen von Hand ist.

In Gleichung (6.11) bilde man $q \to q^{\frac{1}{2}}$ und teile durch 4:

$$\frac{1}{4}(2\vartheta_2\vartheta_3)^2(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)^2(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)^2 = \vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^8 = 4\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}$$

Zur Erinnerung Gleichung (6.9):

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4^8 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}$$

Es folgt mit den Reihen (1.2) und (1.12):

$$\begin{aligned}&\underbrace{\left(q^{1/4}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^k q^{k^2+k}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\chi_4(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4^8}\\ &= \underbrace{\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}\right)}_{\vartheta_4}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}}_{\frac{1}{4}\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^8}\end{aligned} \qquad (6.15)$$

und der Koeffizientenvergleich vor $q^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}(4n+1)} = q^{\frac{1}{2}(2n+1)}$:

$$\begin{aligned}\Omega(2n+1) + 2 \sum_{\substack{k \geq 1 \\ 4n+1-2k^2 \geq 1}} (-1)^k \Omega(2n+1-2k^2) \\ = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 4n+1-4(k^2+k) \geq 1}} (2k+1)(-1)^k \chi_4(4n+1-4(k^2+k))\end{aligned} \tag{6.16}$$

Nun wieder die ersten Summanden bis $2n+1 = 49$:

$$\begin{aligned}&\Omega(2n+1) + 2\Omega(2n+1-2) - 2\Omega(2n+1-8) + 2\Omega(2n+1-18) - 2\Omega(2n+1-32) \\ &\quad = \chi_4(4n+1) - 3\chi_4(4n+1-8) + 5\chi_4(4n+1-24) \\ &\qquad - 7\chi_4(4n+1-48) + 9\chi_4(4n+1-80)\end{aligned}$$

6.3 Wertetabellen

In diesem Kapitel berechnen wir auch gleich Werte von $\chi_8(n)$, welche bei 18 Quadraten benötigt werden, sowie von $\Theta(n)$ für 16 Quadrate, da deren Berechnung analog zu χ_4 bzw. Ω verläuft.

Es sind die Formeln (6.3) und (9.7):

$$\begin{aligned}\chi_4(n) &= \frac{1}{4} \sum_{a^2+b^2=n} a^4 + b^4 - 6a^2b^2 \\ \chi_8(n) &= \frac{1}{4} \sum_{a^2+b^2=n} a^8 + b^8 - 28a^6b^2 - 28a^2b^6 + 70a^4b^4\end{aligned}$$

Die Summanden sind symmetrisch bezüglich Vorzeichenwechsel und Permutationen in (a,b). Wir fassen daher alle die Darstellungen (a,b) mit $a^2+b^2 = n$ zusammen, die durch Vorzeichenwechsel und/oder Permutationen ineinander übergehen. Also verbleiben z.B. alle Darstellungen mit $a \geq b \geq 0$, wobei die *Entartung* (in den Tabellen mit „#“ bezeichnet) zu berücksichtigen ist. Wir benennen auch $\left[a^4\right] := a^4 + b^4$ und $\left[a^2b^2\right] := a^2b^2$ und $\left[a^6b^2\right] := a^6b^2 + b^6a^2$. Diese Notation wird vor allem für $\Omega(n)$ und $\Theta(n)$ (siehe unten) hilfreich sein, ist an diesem Beispiel aber gut zu erklären. Wir verstehen also unter einem Ausdruck in eckigen Klammern eine Summe über *alle* Ausdrücke diese Typs. Somit verändern sich die Summen:

$$\sum_{\substack{a^2+b^2=n \\ a,b \in \mathbb{Z}}} a^4 + b^4 \to \sum_{\substack{a^2+b^2=n \\ a \geq b \geq 0}} \# \cdot \left[a^4\right] =: \sum_{n,2} \left[a^4\right]$$

Der Index in der Summe erinnert daran, dass es sich um Darstellungen von n als Summe von *zwei* Quadraten handelt, was insbesondere für den Entartungsgrad # von Bedeutung ist. In dieser Notation lauten die expliziten Formeln, mit denen dann die Werte in Tabelle 6.1 berechnet werden:

$$\chi_4(n) = \frac{1}{4}\sum_{n,2} \left[a^4\right] - 6\left[a^2b^2\right]$$

$$\chi_8(n) = \frac{1}{4}\sum_{n,2} \left[a^8\right] - 28\left[a^6b^2\right] + 70\left[a^4b^4\right]$$

Tabelle 6.1: Darstellungen als Summe von zwei Quadraten

n	Darst.	#	kurz	$[a^4]$	$[a^2b^2]$	χ_4	$[a^8]$	$[a^6b^2]$	$[a^4b^4]$	χ_8
1	1^2+0^2	4	10_4	1	0	1	1	0	0	1
2	1^2+1^2	4	11_4	2	1	–4	2	2	1	16
4	2^2+0^2	4	20_4	16	0	16	256	0	0	256
5	2^2+1^2	8	21_8	17	4	–14	257	68	16	–1054
8	2^2+2^2	4	22_4	32	16	–64	512	512	256	4096
9	3^2+0^2	4	30_4	81	0	81	6561	0	0	6561
10	3^2+1^2	8	31_8	82	9	56	6562	738	81	–16864
13	3^2+2^2	8	32_8	97	36	–238	6817	3492	1296	–478
16	4^2+0^2	4	40_4	256	0	256	65536	0	0	65536
17	4^2+1^2	4	41_4	257	16	161	65537	4112	256	–31679
18	3^2+3^2	4	33_4	162	81	–324	13122	1458	6561	431568
20	4^2+2^2	8	42_8	272	64	–224	65792	17408	4096	–269824

Nun gehen wir mit den Formeln (6.14) und (8.9) genauso vor:

$$\Omega(n) = \frac{1}{2}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^4 - 3a^2b^2$$

$$\Theta(n) = \frac{2-(-1)^n}{6}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^6 - 15a^4b^2 + 30a^2b^2c^2$$

Die Summanden sind symmetrisch bezüglich Vorzeichenwechsel, jedoch nicht unter Permutationen in (a,b,c,d). Dies erzwingen wir nun wie folgt: Wir schreiben zunächst wieder $\left[a^4\right] := a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ und $\left[a^4b^2\right]$ für eine Summe von 12 Termen dieses Typs, analog die anderen Ausdrücke. Wir können, weil in obiger Formel über *alle* Darstellungen $n = a^2+b^2+c^2+d^2$ summiert wird, auch a^4b^2 in der Summe durch $\left[a^4b^2\right]/12$ ersetzen, genauso die anderen Ausdrücke. Somit haben wir die Summanden symmetrisiert und beschränken uns auf eine Summe über diejenigen Darstellungen mit $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$, unter Berücksichtigung der Entartung #:

$$\sum_{n,4} := \sum_{\substack{a^2+b^2+c^2+d^2=n \\ a\geq b\geq c\geq d\geq 0}} \#$$

Wir fassen also wieder alle die Darstellungen (a, b, c, d) mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n$ zusammen, die durch Vorzeichenwechsel und/oder Permutationen ineinander übergehen.

In dieser Notation lauten die expliziten Formeln, mit denen dann die Werte in Tabelle 6.2 berechnet werden:

$$\Omega(n) = \frac{1}{8} \sum_{n,4} \left[a^4\right] - 2\left[a^2 b^2\right]$$

$$\Theta(n) = \frac{2 - (-1)^n}{24} \sum_{n,4} \left[a^6\right] - 5\left[a^4 b^2\right] + 30\left[a^2 b^2 c^2\right]$$

Mit Hilfe der Tabellen 6.1 und 6.2, sowie E_4, E_4', ξ_5 (verwende Tabelle 4.1 auf Seite 41 und die Definition in Kap. 3.5) können wir dann die Anzahlformeln für 10 und 12 Quadrate berechnen.

Tabelle 6.2: Darstellungen als Summe von vier Quadraten

n	Darst.	$[a^4]$	$[a^2b^2]$	Ω	$\Omega(n)$	$[a^6]$	$[a^4b^2]$	$[a^2b^2c^2]$	Θ	$\Theta(n)$
1	1000_8	1	0	1	1	1	0	0	1	1
2	1100_{24}	2	1	0	0	2	2	0	–8	–8
3	1110_{32}	3	3	–12	–12	3	6	1	12	12
4	1111_{16}	4	6	–16	0	4	12	4	128/3	64
	2000_8	16	0	16		64	0	0	64/3	
5	2100_{48}	17	4	54	54	65	20	0	–210	–210
6	2110_{96}	18	9	0	0	66	42	4	–96	–96
7	2111_{64}	19	15	–88	–88	67	66	13	1016	1016
8	2200_{24}	32	16	0	0	128	128	0	–512	–512
9	2210_{96}	33	24	–180	–99	129	168	16	–2772	–2043
	3000_8	81	0	81		729	0	0	729	
10	2211_{96}	34	33	–384	0	130	210	40	1120	1680
	3100_{48}	82	9	384		730	90	0	560	
11	3110_{96}	83	19	540	540	731	182	9	1092	1092
12	2220_{32}	48	48	–192	0	192	384	64	256	768
	3111_{64}	84	30	192		732	276	28	512	
13	2221_{64}	49	60	–568	–418	193	444	112	10664	1382
	3200_{48}	97	36	150		793	468	0	–9282	
14	3210_{192}	98	49	0	0	794	578	36	–8128	–8128
15	3211_{192}	99	63	–648	–648	795	690	85	–2520	–2520
16	2222_{16}	64	96	–256	0	256	768	256	8192/3	4096
	4000_8	256	0	256		4096	0	0	4096/3	
17	3220_{96}	113	88	–756	594	857	1064	144	–1716	14706
	4100_{48}	257	16	1350		4097	272	0	16422	
18	3221_{192}	114	105	–2304	0	858	1194	232	14784	16344
	3300_{24}	162	81	0		1458	1458	0	–5832	
	4110_{96}	258	33	2304		4098	546	16	7392	
19	3310_{96}	163	99	–420	836	1459	1638	81	–51612	–39940
	4111_{64}	259	51	1256		4099	822	49	11672	
20	3311_{96}	164	118	–864	0	1460	1820	180	–8960	–13440
	4200_{48}	272	64	864		4160	1280	0	–4480	

Tabelle 6.3: Wertetabelle zehn bis zwölf Quadrate

n	E_4	E_4'	χ_4	A_{10}	ξ_5	Ω	A_{12}
1	1	1	1	20	1	1	24
2	1	16	–4	180	–33	0	264
3	–80	80	0	960	244	–12	1760
4	1	256	16	3380	–993	0	7944
5	626	626	–14	8424	3126	54	25872
6	–80	1280	0	16320	–8052	0	64416
7	–2400	2400	0	28800	16808	–88	133056
8	1	4096	–64	52020	–31713	0	253704
9	6481	6481	81	88660	59293	–99	472760
10	626	10016	56	129064	–103158	0	825264
11	–14640	14640	0	175680	161052	540	1297056
12	–80	20480	0	262080	–242292	0	1938336
13	28562	28562	–238	386920	371294	–418	2963664
14	–2400	38400	0	489600	–554664	0	4437312
15	–50080	50080	0	600960	762744	–648	6091584
16	1	65536	256	840500	–1014753	0	8118024
17	83522	83522	322	1137960	1419858	594	11368368
18	6481	103696	–324	1330420	–1956669	0	15653352
19	–130320	130320	0	1563840	2476100	836	19822176
20	626	160256	–224	2050344	–3104118	0	24832944

7 Vierzehn Quadrate

Um ϑ_3^{14} und somit $A_{14}(n)$ zu berechnen, müssen wir die beiden Lambert-Reihen von den Gleichungen (3.7c) und (3.10c) übernehmen und in (2.24) einsetzen:

$$\begin{aligned}61\vartheta_3^{14} &= \left[f_4^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right) - if_2^{(6)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]/\pi^7 + 91\vartheta_3^6\vartheta_2^4\vartheta_4^4 \\ &= 61 - 4\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)^6 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} \\ &\quad + 256\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^6 q^m}{1+q^{2m}} + 91\vartheta_3^6\vartheta_2^4\vartheta_4^4\end{aligned}$$

Dann benennen wir die Koeffizienten des Störterms mit $W(n)$:

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^6\vartheta_4^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty} W(n)q^n \tag{7.1}$$

$W(n)$ ist ganzzahlig, da wegen (1.10) in ϑ_2^4 ein Faktor 2^4 auftaucht.

Jetzt können wir die Reihen (3.16) und (3.17) einsetzen:

$$\begin{aligned}\Rightarrow A_{14}(n) &= \frac{4}{61}\left\{64E_6'(n) - E_6(n) + 364W(n)\right\} \\ &= \frac{4}{61}\left\{\sum_{\substack{d|n \\ d=4k+3}} d^6 - \sum_{\substack{d|n \\ d=4k+1}} d^6 + 64\sum_{\substack{d|n \\ \delta=4k+1}} d^6 - 64\sum_{\substack{d|n \\ \delta=4k+3}} d^6 + 364W(n)\right\}\end{aligned}$$

Indem wir Gleichung (5.26) nochmals mit $S_0^2 = \sum q^{e^2+f^2} = \vartheta_3^2$ multiplizieren erhalten wir $W(n)$ durch die Darstellungen von n als Summe von sechs Quadraten:

$$\begin{aligned}S_4S_0^5 - 3S_2^2S_0^4 &= 2^4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=n} a^4 - 3a^2b^2\right)q^n \\ &= 2\vartheta_2^4\vartheta_3^6\vartheta_4^4 = 32\sum_{n=1}^{\infty}W(n)q^n\end{aligned}$$

Also gilt die folgende explizite Darstellung für $W(n)$:

$$W(n) = \frac{1}{2}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=n} a^4 - 3a^2b^2 = \frac{1}{60}\sum_{n,6} 5[a^4] - 6[a^2b^2] \tag{7.2}$$

Sie ist aber leider zum Rechnen ziemlich unpraktisch, da sich größere Zahlen n auf sehr viele Weisen als Summe von 6 Quadraten schreiben lassen. Wir werden nun deshalb (siehe 7.1) zeigen, dass $W(4n) - 4W(2n) + 64W(n) = 0$ gilt, sowie $W(2m) = 4W(m)$ (falls $m = 4k+1$) bzw. $W(2m) = -28W(m)$ (falls $m = 4k+3$). In 7.2 und 7.3 zeigen wir dann rekursive Berechnungsformeln $\zeta_5(n) \longrightarrow W(4n+1)$ und $\Omega(2n+1) \longrightarrow W(4n+3)$.

7.1 $W(n)$ auf ungerade Argumente reduzieren

Im diesem Kapitel sei m immer eine *ungerade* Zahl, $m := 2n+1$.

Ersetze $q \to -q$ in (7.1):

$$-\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^6 = 16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n W(n)q^n \tag{7.3}$$

Dann berechne (7.1) $\pm$ (7.3):

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_3^2 - \vartheta_4^2) = 16\sum_{n=1}^{\infty} 2W(2n)q^{2n} \tag{7.4a}$$

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_3^2 + \vartheta_4^2) = 16\sum_{n=0}^{\infty} 2W(2n+1)q^{2n+1} \tag{7.4b}$$

Dann ersetze $q \to q^{1/2}$:

$$8\vartheta_2^4\vartheta_3^2\vartheta_4^8 = 32\sum_{n=1}^{\infty} W(2n)q^n \tag{7.5a}$$

$$8\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 32\sum_{n=0}^{\infty} W(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \tag{7.5b}$$

Dann berechne (7.1) $-\ \frac{1}{8}$(7.5a):

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^6\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4\vartheta_3^2\vartheta_4^8 = \vartheta_2^4\vartheta_3^2\vartheta_4^4(\vartheta_3^4 - \vartheta_4^4) = \vartheta_2^8\vartheta_3^2\vartheta_4^4 = \sum_{n=1}^{\infty}(16W(n) - 4W(2n))q^n \tag{7.6}$$

Dann ersetze $q \to -q$:

$$\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(4W(n) - W(2n))q^n \tag{7.7}$$

Dann berechne (7.7) $\pm$ (7.6):

$$\vartheta_2^8\vartheta_3^2\vartheta_4^2(\vartheta_3^2 + \vartheta_4^2) = 8\sum_{n=1}^{\infty}(4W(2n) - W(4n))q^{2n} \tag{7.8a}$$

$$\vartheta_2^8\vartheta_3^2\vartheta_4^2(\vartheta_3^2 - \vartheta_4^2) = -8\sum_{n=0}^{\infty}(4W(2n+1) - W(2(2n+1)))q^{2n+1} \tag{7.8b}$$

Dann ersetze $q \to q^{1/2}$:

$$\begin{aligned}(2\vartheta_2\vartheta_3)^4(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)(2\vartheta_3^2) &= 32\vartheta_2^4\vartheta_3^6(\vartheta_3^4-\vartheta_2^4)\\ &= 32\vartheta_2^4\vartheta_3^6\vartheta_4^4 = 8\sum_{n=1}^{\infty}(4W(2n)-W(4n))q^n \qquad (7.9a)\\ (2\vartheta_2\vartheta_3)^4(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)(2\vartheta_2^2) &= 32\vartheta_2^6\vartheta_3^4(\vartheta_3^4-\vartheta_2^4)\\ &= 32\vartheta_2^6\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = -8\sum_{n=0}^{\infty}(4W(2n+1)-W(2(2n+1)))q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \qquad (7.9b)\end{aligned}$$

Starte jetzt mit Gleichung (7.5b) und ersetze $q \to -q$:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 4\sum_{n=0}^{\infty}W(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \qquad (7.10a)$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^8\vartheta_4^4 = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nW(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \qquad (7.10b)$$

In (7.10b) wurde ein Faktor i gekürzt. Jetzt (7.10b) $\pm$ (7.10a):

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_3^4+\vartheta_4^4) = 8\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+1)q^{\frac{1}{2}(4n+1)} \qquad (7.11a)$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_3^4-\vartheta_4^4) = \vartheta_2^6\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = -8\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+3)q^{\frac{1}{2}(4n+3)} \qquad (7.11b)$$

Jetzt $q \to q^{1/2}$:

$$\begin{aligned}(2\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)^2(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)^2((\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)^2+(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)^2) &= 2\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_3^4-\vartheta_2^4)^2(2\vartheta_3^4+2\vartheta_2^4)\\ &= 4\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4^8(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4) = 8\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)} \qquad (7.12a)\\ (2\vartheta_2\vartheta_3)^3(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)^2(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)^2 &= 8\vartheta_2^3\vartheta_3^3(\vartheta_3^4-\vartheta_2^4)^2\\ &= 8\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_4^8 = -8\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+3)q^{\frac{1}{4}(4n+3)} \qquad (7.12b)\end{aligned}$$

Es lauten (7.9b) und (7.11b):

$$-4\vartheta_2^6\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = \sum_{n=0}^{\infty}(4W(2n+1)-W(2(2n+1)))q^{\frac{1}{2}(2n+1)}$$

$$-4\vartheta_2^6\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = 32\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+3)q^{\frac{1}{2}(4n+3)}$$

Hier führen wir nun einen Koeffizientenvergleich durch. Weil in der zweiten Gleichung nur jeder zweite Exponent der ersten Gleichung vorkommt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} 4W(4n+1) - W(2(4n+1)) &= 0 \\ 4W(4n+3) - W(2(4n+3)) &= 32W(4n+3) \end{aligned}$$

also

$$W(2m) = 4W(m) \qquad (m = 4n+1) \tag{7.13a}$$
$$W(2m) = -28W(m) \qquad (m = 4n+3) \tag{7.13b}$$

Es lauten (7.1) und (7.9a):

$$4\vartheta_2^4\vartheta_3^6\vartheta_4^4 = 64\sum_{n=1}^{\infty} W(n)q^n$$
$$4\vartheta_2^4\vartheta_3^6\vartheta_4^4 = \sum_{n=1}^{\infty}(4W(2n) - W(4n))q^n$$

Hier folgt aus dem Koeffizientenvergleich:

$$4W(2n) - W(4n) = 64W(n) \tag{7.14}$$

Nun haben wir drei Formeln (7.13a), (7.13b), (7.14) gefunden, mit denen wir große gerade Argumente rekursiv auf kleinere ungerade zurückführen können. Nun leiten wir aus diesen drei rekursiven Bedingungen explizite her:

Sei m eine beliebige ungerade Zahl, nenne $u_r = W(2^r m)$. Gleichung (7.14) lautet dann $u_{r+2} - 4u_{r+1} + 64u_r = 0$. Um aus dieser rekursiven Folge eine explizite zu machen, machen wir zunächst den Ansatz $u_r = q^r$. Dann erfüllt jedes q mit $q^2 - 4q + 64 = 0$ die Rekursionsbedingung, also $q_{1,2} = 2 \pm 2i\sqrt{15}$. Folglich können A, B so gewählt werden, dass auch die Anfangsbedingungen $u_0 = W(m)$ und $u_1 = W(2m)$ erfüllt sind, also $u_r = Aq_1^r + Bq_2^r$ gilt. Falls $m = 4n+1$, ist $u_0 = A + B = W(m)$ und $u_1 = Aq_1 + Bq_2 = W(2m) = 4W(m)$, also $A = \frac{1+i\sqrt{15}}{2i\sqrt{15}}W(m)$ und $B = -\frac{1-i\sqrt{15}}{2i\sqrt{15}}W(m)$. Falls $m = 4n+3$, ist $u_0 = A+B = W(m)$ und $u_1 = Aq_1+Bq_2 = W(2m) = -28W(m)$, also $A = \frac{1+i\sqrt{15}}{2}W(m)$ und $B = \frac{1-i\sqrt{15}}{2}W(m)$. Es folgt:

$$W(2^r m) = \frac{(1+i\sqrt{15})^{r+1} - (1-i\sqrt{15})^{r+1}}{2i\sqrt{15}} \cdot 2^r W(m) \qquad (m = 4n+1) \tag{7.15a}$$
$$W(2^r m) = \frac{(1+i\sqrt{15})^{r+1} + (1-i\sqrt{15})^{r+1}}{2} \cdot 2^r W(m) \qquad (m = 4n+3) \tag{7.15b}$$

und für $r \leq 5$:

	$m = 4n+1$	$m = 4n+3$
$W(2m)$	$4W(m)$	$-28W(m)$
$W(4m)$	$-48W(m)$	$-176W(m)$
$W(8m)$	$-448W(m)$	$1088W(m)$
$W(16m)$	$1280W(m)$	$15616W(m)$
$W(32m)$	$33792W(m)$	$-7168W(m)$

(7.16)

Diese Formeln erlauben nun, sich bei der Berechnung der Werte von $W(n)$ auf *ungerade* Argumente zu beschränken.

7.2 Rekursive Berechnungsformel für $W(4n+1)$

Aus den Gleichungen (2.3) und (2.7) folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{16\pi^6}\Big((f_\alpha^2)^{(4)}(1/2)+(f_\alpha^2)^{(4)}(\tau/2)\Big) &= \frac{1}{2}\left(\vartheta_3^8(\vartheta_4^4-\vartheta_2^4)+\vartheta_3^4(\vartheta_4^8-\vartheta_2^8)\right)\\ &= \vartheta_3^{12}-2\vartheta_2^4\vartheta_3^8\end{aligned}$$

Setze nun die Lambertreihen (3.13b) und (3.15b) ein:

$$\begin{aligned}\frac{1}{16\pi^6}\Big((f_\alpha^2)^{(4)}(1/2)+(f_\alpha^2)^{(4)}(\tau/2)\Big) &= 1-8\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m^5q^{2m}}{1-q^{2m}}-8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^5q^m}{1-q^{2m}}\\ &= 1-8\sum_{m=1}^{\infty}m^5q^m\frac{1+(-q)^m}{1-q^{2m}}\\ &= 1-8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^5q^m}{1-(-q)^m}\\ &= 1-8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta_5(n)q^n,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt Gleichung (3.18) verwendet wurde.

Nun ist mit $q\to -q$:

$$1+8\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_5(n)q^n=\vartheta_4^{12}+2\vartheta_2^4\vartheta_4^8$$

Zur Erinnerung Gleichung (7.12a):

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4^8(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)=2\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}$$

Es folgt mit $\vartheta_3^4=\vartheta_2^4+\vartheta_4^4$:

$$\vartheta_2\vartheta_3\left(\vartheta_4^{12}+2\vartheta_2^4\vartheta_4^8\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}$$

Diese Gleichung erweitern wir nun mit $\vartheta_4/2$:

$$\vartheta_4\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}=\frac{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}{2}(\vartheta_4^{12}+2\vartheta_2^4\vartheta_4^8)$$

Also folgt mit (1.12):

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} W(4n+1) q^{\frac{1}{4}(4n+1)}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\left(\vartheta_4^{12}+2\vartheta_2^4\vartheta_4^8\right)} \underbrace{\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{1}{4}(2k)^2}\right)}_{\vartheta_4}$$
$$= \underbrace{\left(1+8\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_5(n) q^n\right)}_{\vartheta_4^{12}+2\vartheta_2^4\vartheta_4^8} \underbrace{\left(q^{1/4}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^k q^{k^2+k}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}$$

Hier führen wir nun einen Koeffizientenvergleich vor $q^{\frac{1}{4}(4n+1)} = q^{1/4} q^n$ durch:

$$\begin{aligned} W(4n+1) + \sum_{\substack{k\geq 1 \\ 4n+1-(2k)^2\geq 1}} 2(-1)^k W(4n+1-(2k)^2) \\ = 8 \sum_{\substack{k\geq 0 \\ n-(k^2+k)\geq 0}} (2k+1)(-1)^k \zeta_5(n-(k^2+k)) \end{aligned} \tag{7.17}$$

wobei zur Verkürzung der Formel $\zeta_5(0) := 1/8$ gesetzt wurde. Die Summation läuft also jeweils solange, wie das Argument x in $W(x)$ bzw. $\zeta_5(x)$ positiv bleibt.

Zum Verständnis dieser Formel liste ich hier die ersten Summanden auf, wobei diese Summation ausreicht für alle $4n+1 \leq 64$, d.h. für $n < 16$:

$$\begin{aligned} W(4n+1) - 2W(4n+1-4) + 2W(4n+1-16) - 2W(4n+1-36) \\ = 8\left\{\zeta_5(n) - 3\zeta_5(n-2) + 5\zeta_5(n-6) - 7\zeta_5(n-12)\right\} \end{aligned} \tag{7.18}$$

Für die Berechnung von $W(4n+1)$ benötigen wir nun noch einige Werte von $\zeta_5(n)$:

n	0	1	2	3	4
$\zeta_5(n)$	$\frac{1}{8}$	1	–31	244	–1055

Diese können wir nun in die Formel (7.18) einsetzen, welche dann für $n \leq 4$ die Werte $W(4n+1)$ liefert:

$n=0$	$W(1) = 8\zeta_5(0) = 1$	$W(1) = 1$
$n=1$	$W(5) - 2W(1) = 8\zeta_5(1) = 8$	$W(5) = 10$
$n=2$	$W(9) - 2W(5) = 8\{\zeta_5(2) - 3\zeta_5(0)\} = -251$	$W(9) = -231$
$n=3$	$W(13) - 2W(9) = 8\{\zeta_5(3) - 3\zeta_5(1)\} = 1928$	$W(13) = 1466$
$n=4$	$W(17) - 2W(13) + 2W(1) = 8\{\zeta_5(4) - 3\zeta_5(2)\} = -7696$	$W(17) = -4766$

7.3 Rekursive Berechnungsformel für $W(4n+3)$

Zur Erinnerung nochmals die Definition für $\Omega(n)$ aus Gleichung (6.11)

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = 16\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(n)q^n = 16\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(2n+1)q^{2n+1}$$

weil $\Omega(2n)$ verschwindet.

Hier nun $q \to q^{1/2}$, dividiere durch 4:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(2\vartheta_2\vartheta_3)^2(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)^2(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)^2 &= \vartheta_2^2\vartheta_3^2(\vartheta_3^4-\vartheta_2^4)^2 \\ &= \vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^8 = 4\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}\end{aligned}$$

Gleichung (7.12b) zur Erinnerung:

$$\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_4^8 = -\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+3)q^{\frac{1}{4}(4n+3)}$$

Also ist mit Formel (1.12):

$$\begin{aligned}&\underbrace{\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{1}{4}(2k)^2}\right)}_{\vartheta_4}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+3)q^{\frac{1}{4}(4n+3)}\right)}_{-\vartheta_2^3\vartheta_3^3\vartheta_4^8} \\ = -8\,&\underbrace{q^{1/4}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^k q^{k^2+k}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Omega(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}\right)}_{\frac{1}{4}\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^8}\end{aligned}$$

Nun der Koeffizientenvergleich vor $q^{\frac{1}{4}(4n+3)} = q^{1/4}q^{\frac{1}{2}(2n+1)}$:

$$\begin{aligned}W(4n+3) + &\sum_{\substack{k\ge1\\4n+3-(2k)^2\ge1}} 2(-1)^k W(4n+3-(2k)^2) \\ = -8 &\sum_{\substack{k\ge0\\2n+1-2(k^2+k)\ge1}}(2k+1)(-1)^k\Omega(2n+1-2(k^2+k))\end{aligned} \tag{7.19}$$

Die folgende Summation reicht für alle $4n+3 \le 63$ aus:

$$\begin{aligned}W(4n+3) - 2W(4n+3-4) + 2W(4n+3-16) - 2W(4n+3-36) \\ = -8\,\{\Omega(2n+1) - 3\Omega(2n+1-2) + 5\Omega(2n+1-6) \\ -7\Omega(2n+1-12) + 9\Omega(2n+1-20) - 11\Omega(2n+1-30)\}\end{aligned} \tag{7.20}$$

Für die Berechnung von $W(4n+3)$ benötigen wir nun noch einige Werte von $\Omega(n)$ (siehe Kapitel 6.3):

n	1	3	5	7	9
$\Omega(n)$	1	–12	54	–88	–99

Diese können wir nun in die Formel (7.20) einsetzen und erhalten $W(4n+3)$ für $n \leq 4$:

$$\begin{aligned}
W(3) &= -8\Omega(1) = -8 & W(3) &= -8 \\
W(7) - 2W(3) &= -8\left\{\Omega(3) - 3\Omega(1)\right\} = 120 & W(7) &= 80 \\
W(11) - 2W(7) &= -8\left\{\Omega(5) - 3\Omega(3)\right\} = -720 & W(11) &= -248 \\
W(15) - 2W(11) &= -8\left\{\Omega(7) - 3\Omega(5) + 5\Omega(1)\right\} = 1960 & W(15) &= -80 \\
W(19) - 2W(15) + 2W(3) &= -8\left\{\Omega(9) - 3\Omega(7) + 5\Omega(3)\right\} = -3480 & W(19) &= 1944
\end{aligned}$$

7.4 Wertetabellen

Wir haben in den vergangenen beiden Kapiteln $W(4n+1)$ und $W(4n+3)$ berechnet. Nun können mit Hilfe der Verdopplungsformeln in Tabelle (7.16) die $W(n)$ für gerades n berechnet werden (siehe Tabelle 7.1).

Mit Hilfe der Teilerfunktionen E_6 und E_6' folgen also die Anzahlen für 14 Quadrate:

n	Darst.	$[a^4]$	$[a^2b^2]$	Beitrag	$W(n)$
1	100000_{12}	1	0	1	1
2	110000_{60}	2	1	4	4
3	111000_{160}	3	3	–8	–8
4	111100_{240}	4	6	–64	–48
	200000_{12}	16	0	16	
5	111110_{192}	5	10	–112	10
	210000_{120}	17	4	122	
6	111111_{64}	6	15	–64	224
	211000_{480}	18	9	288	
7	211100_{960}	19	15	80	80
8	211110_{960}	20	22	–512	–448
	220000_{60}	32	16	64	
9	211111_{384}	21	30	–480	–231
	221000_{480}	33	24	168	
	300000_{12}	81	0	81	
10	221100_{1440}	34	33	–672	40
	310000_{120}	82	9	712	
11	221110_{1920}	35	43	–2656	–248
	311000_{480}	83	19	2408	
12	222000_{160}	48	48	–128	1408
	221111_{960}	36	54	–2304	
	311100_{960}	84	30	3840	
13	222100_{960}	49	60	–1840	1466
	311110_{960}	85	42	2768	
	320000_{120}	97	36	538	
14	222110_{1920}	50	73	–6016	–2240
	311111_{384}	86	55	640	
	321000_{960}	98	49	3136	
15	222111_{1280}	51	87	–5696	–80
	321100_{2880}	99	63	5616	
16	222200_{240}	64	96	–1024	1280
	321110_{3840}	100	78	2048	
	400000_{12}	256	0	256	
17	222210_{960}	65	112	–5552	–4766
	322000_{480}	113	88	296	
	321111_{1920}	101	94	–1888	
	410000_{120}	257	16	2378	
18	222211_{960}	66	129	–7104	–924
	322100_{2880}	114	105	–2880	
	330000_{60}	162	81	324	
	411000_{480}	258	33	8736	

Tabelle 7.1: Wertetabelle 14 Quadrate

n	E_6	E_6'	W	A_{14}
1	1	1	1	28
2	1	64	4	364
3	–728	728	–8	2912
4	1	4096	–48	16044
5	15626	15626	10	64792
6	–728	46592	224	200928
7	–117648	117648	80	503360
8	1	262144	–448	1089452
9	530713	530713	–231	2186940
10	15626	1000064	40	4196920
11	–1771560	1771560	–248	7544992
12	–728	2981888	1408	12547808
13	4826810	4826810	1466	19975256
14	–117648	7529472	–2240	31553344
15	–11375728	11375728	–80	48484800
16	1	16777216	1280	70439852
17	24137570	24137570	–4766	99602104
18	530713	33965632	–924	142487436
19	–47045880	47045880	1944	200569824
20	15626	64004096	–480	268594872

8 Sechzehn Quadrate

Wir setzen die Reihen (3.13c) und (3.15c) in (2.25) ein:

$$
\begin{aligned}
17\vartheta_3^{16} &= \left[(f_\alpha^2)^{(6)}\,(1/2) + (f_\alpha^2)^{(6)}(\tau/2)\right]/(16\pi^8) + 32\vartheta_3^8\vartheta_2^4\vartheta_4^4 \\
&= 17 + 32\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{m^7 q^{2m}}{1-q^{2m}} + 32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^7 q^m}{1-q^{2m}} + 32\vartheta_3^8\vartheta_2^4\vartheta_4^4 \\
&= 17 + 32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^7 q^m(1+(-q)^m)}{1-q^{2m}} + 32\vartheta_3^8\vartheta_2^4\vartheta_4^4 \\
&= 17 + 32\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^7 q^m}{1-(-q)^m} + 32\vartheta_3^8\vartheta_2^4\vartheta_4^4
\end{aligned}
$$

Dann benennen wir die Koeffizienten des Störterms mit $\Theta(n)$

$$
\vartheta_2^4\vartheta_3^8\vartheta_4^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Theta(n)q^n \tag{8.1}
$$

$\Theta(n)$ ist ganzzahlig, da wegen (1.10) in ϑ_2^4 ein Faktor 2^4 auftaucht.
Also ist mit Formel (3.18)

$$
A_{16}(n) = \frac{32}{17}(-1)^{n-1}\{\zeta_7(n) + 16\Theta(n)\} = \frac{32}{17}\left\{\sum_{d|n}(-1)^{n-d}d^7 + 16(-1)^{n-1}\Theta(n)\right\}
$$

Wir werden später (siehe 8.1) zeigen, dass $\Theta(2n) = -8\Theta(n)$ gilt. Im folgenden Unterkapitel 8.2 zeigen wir eine rekursive Berechnungsformel $W(4n+1) \longrightarrow \Theta(2n+1)$. Schließlich geben wir eine explizite Darstellung für $\Theta(n)$ in Abhängigkeit der Darstellungsmöglichkeiten von n als Summe von 4 Quadraten an.

8.1 $\Theta(n)$ auf ungerade Argumente reduzieren

zunächst $q \to -q$ in (8.1):

$$
-\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = -16\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(n)q^n \tag{8.2}
$$

Bilde nun (8.1) $\pm$ (8.2):

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_3^4-\vartheta_4^4)=\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^4=-32\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(2n)q^{2n} \tag{8.3}$$

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_3^4+\vartheta_4^4)=32\sum_{n=0}^{\infty}\Theta(2n+1)q^{2n+1} \tag{8.4}$$

Nun bilde $q \to q^2$ in (8.2):

$$-\left(\frac{1}{2}(\vartheta_3^2-\vartheta_4^2)\right)^2\left(\frac{1}{2}(\vartheta_3^2+\vartheta_4^2)\right)^2(\vartheta_3\vartheta_4)^4=-16\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(n)q^{2n}$$

also

$$(\vartheta_3^4-\vartheta_4^4)^2(\vartheta_3\vartheta_4)^4=\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^4=256\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(n)q^{2n} \tag{8.5}$$

Wenn man nun (8.5) mit (8.3) vergleicht, erhält man

$$256\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(n)q^{2n}=-32\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(2n)q^{2n}$$

folglich durch Koeffizientenvergleich vor q^{2n} die gesuchte Identität

$$\Theta(2n)=-8\Theta(n) \tag{8.6}$$

Also kann man sich für die Berechnung von $\Theta(n)$ wieder auf ungerade Argumente beschränken.

8.2 Rekursive Berechnungsformel für $\Theta(2n+1)$

Bilde zunächst $q \to q^{1/2}$ in (8.4)

$$(2\vartheta_2\vartheta_3)^2(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)^2(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)^2((\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)^2+(\vartheta_3^2-\vartheta_2^2)^2)=32\sum_{n=0}^{\infty}\Theta(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}$$

also

$$(\vartheta_2\vartheta_3)^2(\vartheta_3^4-\vartheta_2^4)^2(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)=\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^8(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)=4\sum_{n=0}^{\infty}\Theta(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \tag{8.7}$$

Wenn man das nun mit (7.12a) vergleicht, erhält man

$$4\sum_{n=0}^{\infty}\Theta(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}=2\vartheta_2\vartheta_3\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}$$

erweitere dies mit $\vartheta_4/4$, und setze die Reihen (1.2) und (1.12) ein:

$$\underbrace{\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}\right)}_{\vartheta_4}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Theta(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}\right)}_{\frac{1}{4}\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^8(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)}$$
$$=\underbrace{\left(q^{1/4}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^k q^{k^2+k}\right)}_{\frac{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}{2}}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}W(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4^8(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)}$$

Führe hier einen Koeffizientenvergleich vor $q^{\frac{1}{2}(2n+1)}=q^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}(4n+1)}$ durch:

$$\Theta(2n+1)+2\sum_{\substack{k\geq 1\\ 2n+1-2k^2\geq 1}}(-1)^k\Theta(2n+1-2k^2)$$
$$=\sum_{\substack{k\geq 0\\ 4n+1-4(k^2+k)\geq 0}}(2k+1)(-1)^k W(4n+1-4(k^2+k)) \tag{8.8}$$

Nun noch eine Liste der ersten Summanden, wobei diese Formel ausreicht für alle $2n+1\leq 71$:

$$\begin{aligned}\Theta(2n+1)-2\Theta(2n+1-2)+2\Theta(2n+1-8)\\ -2\Theta(2n+1-18)+2\Theta(2n+1-32)-2\Theta(2n+1-50)\\ =W(4n+1)-3W(4n+1-8)+5W(4n+1-24)\\ -7W(4n+1-48)+9W(4n+1-80)-11W(4n+1-120)\end{aligned}$$

8.3 Explizite Darstellung für $\Theta(n)$

Glaisher gibt eine explizite Formel für $\Theta(n)$ an, die von den Darstellungen von n als Summe von vier Quadraten abhängt:

$$\Theta(n)=\frac{2-(-1)^n}{6}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n}a^6-15a^4b^2+30a^2b^2c^2 \tag{8.9}$$

Es folgt also aus (8.2) und (8.3):

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8=16\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(n)q^n$$
$$\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^4=-32\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(2n)q^{2n}$$
$$\Rightarrow\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_4^4-\vartheta_2^4)=16\sum_{n=0}^{\infty}\Theta(2n+1)q^{2n+1}+48\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(2n)q^{2n} \tag{8.10}$$

Gleichung (5.27) lautet:

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_4^4-\vartheta_2^4)=8\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n}a^6-15a^4b^2+30a^2b^2c^2\right)q^n$$

Aus dem Vergleich mit (8.10) folgt:

$$\begin{aligned}16\Theta(n)&=8\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n}\{a^6-15a^4b^2+30a^2b^2c^2\} && (n=2k+1)\\ 48\Theta(n)&=8\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n}\{a^6-15a^4b^2+30a^2b^2c^2\} && (n=2k)\\ \Rightarrow\Theta(n)&=\frac{2-(-1)^n}{6}\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n}\{a^6-15a^4b^2+30a^2b^2c^2\} && (\forall n)\end{aligned}$$

8.4 Wertetabellen

Mit Hilfe der Werte von $\Theta(n)$ auf Seite 57 können mit ζ_7 die Anzahlen für 16 Quadrate berechnet werden:

n	ζ_7	Θ	A_{16}
1	1	1	32
2	–127	–8	480
3	2188	12	4480
4	–16511	64	29152
5	78126	–210	140736
6	–277876	–96	525952
7	823544	1016	1580800
8	–2113663	–512	3994080
9	4785157	–2043	8945824
10	–9922002	1680	18626112
11	19487172	1092	36714624
12	–36126068	768	67978880
13	62748518	1382	118156480
14	–104590088	–8128	197120256
15	170939688	–2520	321692928
16	–270549119	4096	509145568
17	410338674	14706	772845120
18	–607714939	16344	1143441760
19	893871740	–39940	1681379200
20	–1289938386	–13440	2428524096

(8.11)

9 Achtzehn Quadrate

Die Reihen (3.10d) und (3.7d) in die Linearkombination (2.26) einsetzen:

$$\begin{aligned}
&\left[f_4^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) + i f_2^{(8)}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]/\pi^9 \\
&= 1385 + 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^8 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}(-1)^{m-1} + 1024\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^8 q^m}{1+q^{2m}} \\
&= 1385\vartheta_3^{18} + 2\vartheta_3^2\vartheta_2^8\vartheta_4^8 - 3052\vartheta_3^{10}\vartheta_2^4\vartheta_4^4
\end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned}
\vartheta_3^{18} = 1 + \frac{1}{1385}\Bigg\{ & 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^8 q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}(-1)^{m-1} \\
& +1024\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^8 q^m}{1+q^{2m}} - 2\vartheta_3^2\vartheta_2^8\vartheta_4^8 + 3052\vartheta_3^{10}\vartheta_2^4\vartheta_4^4\Bigg\} \qquad (9.1)
\end{aligned}$$

Weil der Störterm $1385R_{18} = 3052\vartheta_3^{10}\vartheta_2^4\vartheta_4^4 - 2\vartheta_3^2\vartheta_2^8\vartheta_4^8$ zwei Spitzenformen beinhaltet, müssen wir zwei neue Funktionen definieren – $G(n)$ und $\chi_8(n)$:

$$\begin{aligned}
4\vartheta_2^4\vartheta_4^4\vartheta_3^{10} + \vartheta_2^8\vartheta_4^8\vartheta_3^2 &= 4\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 3\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} - 2\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 + \vartheta_2^{16}\vartheta_3^2 \\
&= 64\sum_{n=1}^{\infty}\chi_8(n)q^n = b \qquad (9.2) \\
\vartheta_2^4\vartheta_4^4\vartheta_3^6(\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4) &= \vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 3\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} + 2\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 \\
&= 16\sum_{n=1}^{\infty}G(n)q^n = c \qquad (9.3)
\end{aligned}$$

Wieder sind beide Funktionen wegen (1.10) ganzzahlig. Wir werden nun den Störterm mit Hilfe von $\chi_8(n)$ und $G(n)$ darstellen:

Bilde in Gleichung (9.3) $q \to -q$:

$$-\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^6(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) = 16\sum_{n=1}^{\infty}G(n)(-1)^n q^n \qquad (9.4)$$

Nun (9.3) ± (9.4):

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_3^2(\vartheta_4^4-\vartheta_2^4)-\vartheta_4^2(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)) = 32\sum_{n=1}^{\infty} G(2n)q^{2n}$$

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^4(\vartheta_3^2(\vartheta_4^4-\vartheta_2^4)+\vartheta_4^2(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)) = 32\sum_{n=0}^{\infty} G(2n+1)q^{2n+1}$$

Nun $q \to q^{\frac{1}{2}}$ (nach Vereinfachung und Division durch 8):

$$11\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} - 5\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 7\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 + t_2^{16}\vartheta_3^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty} G(2n)q^n = d \tag{9.5}$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 7\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 11\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - 5\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = 4\sum_{n=0}^{\infty} G(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \tag{9.6}$$

Insgesamt haben wir jetzt mit dem Störterm sowie (9.2), (9.3) und (9.5) ein Gleichungssystem aufgestellt:

$$3052\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 3054\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} + 4\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 - 2\vartheta_2^{16}\vartheta_3^2 = a = 1385R_{18}$$

$$4\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 3\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} - 2\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 + \vartheta_2^{16}\vartheta_3^2 = b = 64\sum_{n=1}^{\infty} \chi_8(n)q^n$$

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 3\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} + 2\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 = c = 16\sum_{n=1}^{\infty} G(n)q^n$$

$$5\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 11\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} + 7\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 - \vartheta_2^{16}\vartheta_3^2 = d = -4\sum_{n=1}^{\infty} G(2n)q^n$$

Ziel ist eine Lösung dieses Gleichungssystems, die uns erlaubt, a durch b, c und d darzustellen, also eine Linearkombination $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$. Wir benennen zunächst die zugehörige Matrix mit A:

$$A = \begin{pmatrix} 3052 & -3054 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 5 & -11 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Linearkombination $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$ ist also ein Vektor aus dem Kern von A^T. Ein solcher ist $(-13, 6094, -15300, 6120)$, also ist

$$\begin{aligned} 13a &= 6094b - 15300c + 6120d \\ 18005R_{18} &= 6094\left(4\sum_{n=1}^{\infty}\chi_8(n)q^n\right) \\ &\quad - 15300\left(16\sum_{n=1}^{\infty} G(n)q^n\right) + 6120\left(-4\sum_{n=1}^{\infty} G(2n)q^n\right) \end{aligned}$$

Wenn man das und die Formeln (3.16) und (3.17) in (9.1) einsetzt, erhält man:

$$
\begin{aligned}
A_{18}(n) &= \frac{4}{1385}\left\{E_8(n) + 256E_8'(n)\right\} + \frac{88}{65}\chi_8(n) - \frac{4896}{3601}\{10G(n) + G(2n)\} \\
&= \frac{4}{1385}\left\{\sum_{\substack{d|n\\ d\equiv 1(4)}} d^8 - \sum_{\substack{d|n\\ d\equiv 3(4)}} d^8 + 256\sum_{\substack{d|n\\ \delta\equiv 1(4)}} d^8 - 256\sum_{\substack{d|n\\ \delta\equiv 3(4)}} d^8\right\} \\
&\quad + \frac{88}{65}\chi_8(n) - \frac{4896}{3601}\{10G(n) + G(2n)\}
\end{aligned}
$$

Wir werden nun zunächst in 9.1 eine explizite Formel für $\chi_8(n)$ angeben, dann in 9.4 bis 9.6 die Funktion $G(n)$ auf ungerade Argumente reduzieren und für diese dann rekursive Berechnungsformeln angeben.

9.1 Explizite Formel für $\chi_8(n)$

Gleichungen (9.2) und (5.28) lauten:

$$
\begin{aligned}
4\vartheta_2^4\vartheta_4^4\vartheta_3^{10} + \vartheta_2^8\vartheta_4^8\vartheta_3^2 &= 64\sum_{n=1}^{\infty}\chi_8(n)q^n \\
4\vartheta_2^4\vartheta_3^{10}\vartheta_4^4 + \vartheta_2^8\vartheta_3^2\vartheta_4^8 &= 32\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{a^2+b^2=n} a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4\right)q^n
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{a^2+b^2=n}(a+ib)^8 &= \frac{1}{4}\sum_{a^2+b^2=n}(a^8 + b^8 - 28a^6b^2 - 28a^2b^6 + 70a^4b^4) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a^2+b^2=n}(a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4)
\end{aligned}
$$

Also gilt die folgende explizite Darstellung von $\chi_8(n)$:

$$
\chi_8(n) = \frac{1}{2}\sum_{a^2+b^2=n}(a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4) = \frac{1}{4}\sum_{a^2+b^2=n}(a+ib)^8 \tag{9.7}
$$

9.2 Rekursionsformel von $\chi_8(n)$

Analog zum Kapitel über χ_4 werden wir einige Eigenschaften der Funktion χ_8 herleiten. Zur Erinnerung die definierende Gleichung (9.2):

$$
4\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 3\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} - 2\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 + \vartheta_2^{16}\vartheta_3^2 = 64\sum_{n=1}^{\infty}\chi_8(n)q^n
$$

Hiermit folgt durch $q \to q^{\frac{1}{2}}$ nach Sortieren von Potenzen in ϑ_2^2:

$$4\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 3\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} - 2\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 + \vartheta_2^{16}\vartheta_3^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\chi_8(2n)q^n \tag{9.8}$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 2\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 + 4\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = 4\sum_{n=0}^{\infty}\chi_8(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \tag{9.9}$$

Aus dem Vergleich von (9.2) mit (9.8) folgt:

$$4\chi_8(2n) = 64\chi_8(n) \qquad \Rightarrow \chi_8(2n) = 16\chi_8(n) \tag{9.10}$$

Wenn man in (9.9) $q \to -q$ durchführt, erhält man nach Division durch i mit Hilfe der Jacobi'schen Thetarelation:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_2^2\vartheta_4^{16} - 2\vartheta_2^6\vartheta_4^{12} - 3\vartheta_2^{10}\vartheta_4^8 + 4\vartheta_2^{14}\vartheta_4^4\\
&= \vartheta_2^2(\vartheta_3^{16} - 4\vartheta_3^{12}\vartheta_2^4 + 6\vartheta_3^8\vartheta_2^8 - 4\vartheta_3^4\vartheta_2^{12} + \vartheta_2^{16}) + \dots\\
&= \vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 2\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 + 4\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4\\
&= 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\chi_8(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}
\end{aligned}$$

Weil also diese Transformation die linke Seite der Gleichung unverändert gelassen hat, folgt auf der rechten Seite $\chi_8(2n+1) = (-1)^n\chi_8(2n+1)$, also insbesondere

$$\chi_8(4n+3) = 0 \tag{9.11}$$

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 2\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 + 4\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = 4\sum_{n=0}^{\infty}\chi_8(4n+1)q^{\frac{1}{2}(4n+1)} \tag{9.12}$$

Nun $q \to q^{\frac{1}{2}}$ und durch 2 teilen:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_3^{16} - 68\vartheta_2^4\vartheta_3^{12} + 134\vartheta_2^8\vartheta_3^8 - 68\vartheta_2^{12}\vartheta_3^4 + \vartheta_2^{16})\\
&= \vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_4^{16} - 64\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\chi_8(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Die Formeln für 16 Quadrate lauten:

$$17\vartheta_3^{16} = 17 + 32\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\{\zeta_7(n) + 16\Theta(n)\}q^n$$

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^8\vartheta_4^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Theta(n)q^n$$

also mit $q \to -q$:

$$17\vartheta_4^{16} = 17 - 32\sum_{n=1}^{\infty}\{\zeta_7(n) + 16\Theta(n)\}q^n$$

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(n)q^n$$

also

$$\vartheta_4^{16} - 64\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 1 - \frac{32}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\{\zeta_7(n) + 560\Theta(n)\}q^n =: 1 - 32\sum_{n=1}^{\infty}T(n)q^n \tag{9.14}$$

mit

$$T(n) = \frac{1}{17}\{\zeta_7(n) + 560\Theta(n)\} = 33\Theta(n) + \frac{1}{17}\{\zeta_7(n) - \Theta(n)\}$$

Folglich ist mit den Reihen (9.14, (9.13), (1.2) und (1.12):

$$\underbrace{\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}\right)}_{\vartheta_4}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\chi_8(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_4^{16}-64\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8)}$$

$$= \underbrace{\left(q^{1/4}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^k q^{k^2+k}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}\underbrace{\left(1 - 32\sum_{n=1}^{\infty}T(n)q^n\right)}_{\vartheta_4^{16}-64\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8}$$

Führe hier mit $T(0) := -\frac{1}{32}$ einen Koeffizientenvergleich vor $q^{\frac{1}{4}(4n+1)} = q^{\frac{1}{4}}q^n$ durch:

$$\begin{aligned}\chi_8(4n+1) + 2\sum_{\substack{k\geq 1\\ 4n+1-(2k)^2\geq 1}}(-1)^k\chi_8(4n+1-(2k)^2)\\ = 32\sum_{\substack{k\geq 0\\ n-(k^2+k)\geq 0}}(2k+1)(-1)^k T(n-(k^2+k))\end{aligned} \tag{9.15}$$

Nun noch eine Liste der ersten Summanden, wobei diese Formel ausreicht für alle $4n+1 \leq 61$:

$$\begin{aligned}\chi_8(4n+1) + 2\chi_8(4n+1-4) - 2\chi_8(4n+1-16) + 2\chi_8(4n+1-36)\\ = 32\{T(n) - 3T(n-2) + 5T(n-6) - 7T(n-12)\}\end{aligned}$$

9.3 Explizite Formel für $G(n)$

Indem wir Gleichung (5.27) nochmals mit $S_0^2 = \sum q^{e^2+f^2} = \vartheta_3^2$ multiplizieren erhalten wir $G(n)$ durch die Darstellungen von n als Summe von sechs Quadraten:

$$S_6S_0^5 - 15S_4S_2S_0^4 + 30S_2^3S_0^3 = 2^6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{a^2+b^2+c^2+d^2\\+e^2+f^2=n}} a^6 - 15a^4b^2 + 30a^2b^2c^2\right)q^n$$

$$= 8\vartheta_2^4\vartheta_3^6\vartheta_4^4(\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4) = 8\cdot 16\sum_{n=1}^{\infty}G(n)q^n$$

Also gilt die folgende explizite Darstellung für $G(n)$:

$$G(n) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{a^2+b^2+c^2+d^2\\+e^2+f^2=n}} a^6 - 15a^4b^2 + 30a^2b^2c^2 = \frac{1}{12}\sum_{n,6}[a^6] - 3[a^4b^2] + 9[a^2b^2c^2] \qquad (9.16)$$

Sie ist aber leider zum Rechnen ziemlich unpraktisch, da sich größere Zahlen n auf sehr viele Weisen als Summe von 6 Quadraten schreiben lassen.

Hier eine Tabelle:

9.4 $G(n)$ auf gerade Argumente reduzieren

Gleichung (9.5) lautet:

$$-5\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} + 11\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} - 7\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 + t_2^{16}\vartheta_3^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}G(2n)q^n$$

Nun $q \to q^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}-5(2\vartheta_2\vartheta_3)^2(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)^7 + 11(2\vartheta_2\vartheta_3)^4(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)^5&\\ -7(2\vartheta_2\vartheta_3)^6(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)^3 + (2\vartheta_2\vartheta_3)^8(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)&\\ = 4\sum_{n=1}^{\infty}G(2n)q^{\frac{1}{2}n}&\end{aligned}$$

Hier kann man, nachdem man ausmultipliziert hat, den Anteil, der nur ganze Potenzen von q enthält, d.h. der ϑ_2^2 nur in geraden Potenzen enthält, sowie den restlichen Anteil herausfiltern:

$$9\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 7\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} + 3\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6 - 5\vartheta_2^{16}\vartheta_3^2 = \sum_{n=1}^{\infty}G(2(2n))q^{\frac{1}{2}(2n)} \qquad (9.17)$$

$$5\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 3\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 7\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - 9\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = -\sum_{n=0}^{\infty}G(2(2n+1)))q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \qquad (9.18)$$

Ein Vorzeichenwechsel $q \to -q$ in (9.6) und (9.18) liefert:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} + 3\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} - 4\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \tag{9.19}$$

$$5\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 17\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 28\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - 16\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G(2(2n+1)))q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \tag{9.20}$$

5·(9.5) + (9.17) liefert:

$$-16(\vartheta_2^4\vartheta_3^{14} - 3\vartheta_2^8\vartheta_3^{10} + 2\vartheta_2^{12}\vartheta_3^6) = \sum_{n=1}^{\infty}(20G(2n) + G(4n))q^n$$

Der Vergleich mit Gleichung (9.3) liefert $20G(2n) + G(4n) = -16 \cdot 16G(n)$, also

$$G(4n) + 20G(2n) + 256G(n) = 0 \tag{9.21}$$

(9.6) ± (9.19) sowie (9.18) ± (9.20) liefert:

$$2\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 4\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 7\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - 5\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = 8\sum_{n=0}^{\infty}G(4n+1)q^{\frac{1}{2}(4n+1)} \tag{9.22}$$

$$5(-2\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 3\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - \vartheta_2^{14}\vartheta_3^4) = 8\sum_{n=0}^{\infty}G(4n+3)q^{\frac{1}{2}(4n+3)} \tag{9.23}$$

$$5(2\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 4\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 7\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - 5\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4) = -2\sum_{n=0}^{\infty}G(2(4n+1)))q^{\frac{1}{2}(4n+1)} \tag{9.24}$$

$$7(2\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} - 3\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 + \vartheta_2^{14}\vartheta_3^4) = -2\sum_{n=0}^{\infty}G(2(4n+3)))q^{\frac{1}{2}(4n+3)} \tag{9.25}$$

Aus dem Vergleich von (9.22) mit (9.24) sowie von (9.23) mit (9.25) folgt:

$$G(2m) = -20G(m) \qquad (m = 4n+1) \tag{9.26}$$

$$G(2m) = \frac{28}{5}G(m) \qquad (m = 4n+3) \tag{9.27}$$

Mit diesen beiden Gleichungen, in Kombination mit (9.21), lässt sich nun die Berechnung von $G(2^r m)$ auf $G(m)$, also auf ungerade Argumente reduzieren, wobei die Rechnung analog zum Ende von Kapitel 7.1 verläuft. Man erhält:

$$G(2^r m) = \frac{(-5+i\sqrt{39})^{r+1} - (-5-i\sqrt{39})^{r+1}}{2i\sqrt{39}}\ 2^r G(m) \qquad (m = 4n+1) \tag{9.28}$$

$$G(2^r m) = \frac{(-5+i\sqrt{39})^{r+1} + (-5-i\sqrt{39})^{r+1}}{-10}\ 2^r G(m) \qquad (m = 4n+3) \tag{9.29}$$

und für $r \leq 5$:

$$\begin{array}{r|r|r}
 & m = 4n+1 & m = 4n+3 \\
\hline
G(2m) & -20G(m) & 28/5G(m) \\
G(4m) & 144G(m) & -368G(m) \\
G(8m) & 2240G(m) & 29632/5G(m) \\
G(16m) & -81664G(m) & -24320G(m) \\
G(32m) & 1059840G(m) & -5153792/5G(m)
\end{array} \tag{9.30}$$

9.5 Rekursive Berechnungsformel für $G(4n+1)$

Formel (9.6) lautet:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 7\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 11\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - 5\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = 4\sum_{n=0}^{\infty} G(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}$$

Hier nun $q \to -q$, durch i teilen:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_2^2\vartheta_4^{16} + 7\vartheta_2^6\vartheta_4^{12} + 11\vartheta_2^{10}\vartheta_4^8 + 5\vartheta_2^{14}\vartheta_4^4 \\
&= \vartheta_2^2\vartheta_3^{16} + 3\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} - 4\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}
\end{aligned} \tag{9.31}$$

Nun (9.6) ± (9.31):

$$2\vartheta_2^2\vartheta_3^{16} - 4\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 7\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - 5\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = 8\sum_{n=0}^{\infty} G(4n+1)q^{\frac{1}{2}(4n+1)} \tag{9.32}$$

$$-10\vartheta_2^6\vartheta_3^{12} + 15\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - 5\vartheta_2^{14}\vartheta_3^4 = 8\sum_{n=0}^{\infty} G(4n+3)q^{\frac{1}{2}(4n+3)} \tag{9.33}$$

Nun (9.32) – 2·(9.12)

$$13(\vartheta_2^{10}\vartheta_3^8 - \vartheta_2^{14}\vartheta_3^4) = 13\vartheta_2^{10}\vartheta_3^4\vartheta_4^4 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\left\{G(4n+1) - \chi_8(4n+1)\right\}q^{\frac{1}{2}(4n+1)}$$

jetzt $q \to q^{\frac{1}{2}}$ und $H(4n+1) := G(4n+1) - \chi_8(4n+1)$:

$$52\vartheta_2^5\vartheta_3^5\vartheta_4^8 = \sum_{n=0}^{\infty} H(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}$$

Gleichung (8.2) lautet:

$$\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(n)q^n$$

Folglich ist mit den Reihen (1.2) und (1.12):

$$1664 \underbrace{\left(q^{1/4}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^k q^{k^2+k}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Theta(n)q^n\right)}_{\frac{1}{16}\vartheta_2^4\vartheta_3^4\vartheta_4^8}$$
$$= \underbrace{\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}\right)}_{\vartheta_4} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}H(4n+1)q^{\frac{1}{4}(4n+1)}\right)}_{52\vartheta_2^5\vartheta_3^5\vartheta_4^8}$$

Führe hier einen Koeffizientenvergleich vor $q^{\frac{1}{4}(4n+1)} = q^{\frac{1}{4}}q^n$ durch:

$$\begin{aligned} H(4n+1) + 2 \sum_{\substack{k\geq 1 \\ 4n+1-(2k)^2\geq 1}} (-1)^k H(4n+1-(2k)^2) \\ = \sum_{\substack{k\geq 0 \\ n-(k^2+k)\geq 0}} (2k+1)(-1)^k \Theta(n-(k^2+k)) \end{aligned} \tag{9.34}$$

Nun noch eine Liste der ersten Summanden, wobei diese Formel ausreicht für alle $4n+1 \leq 61$:

$$\begin{aligned} H(4n+1) + 2H(4n+1-4) - 2H(4n+1-16) + 2H(4n+1-36) \\ = 1664\{\Theta(n) - 3\Theta(n-2) + 5\Theta(n-6) - 7\Theta(n-12)\} \end{aligned} \tag{9.35}$$

Für die Berechnung von $G(4n+1)$ benötigen wir noch einige Werte von $\Theta(n)$:

n	0	1	2	3	4
$\Theta(n)$	0	1	–8	12	64

Dann liefert die Formel (9.35) für $n \leq 4$ folgende Werte für $H(4n+1) := G(4n+1) - \chi_8(4n+1)$:

$$\begin{aligned} H(1) &= 1664\Theta(0) = 0 & H(1) &= 0 \\ H(5) + 2H(1) &= 1664\Theta(1) = 1664 & H(5) &= 1664 \\ H(9) + 2H(5) &= 1664\{\Theta(2) - 3\Theta(0)\} = -13312 & H(9) &= -9984 \\ H(13) + 2H(9) &= 1664\{\Theta(3) - 3\Theta(1)\} = 14976 & H(13) &= -4992 \\ H(17) + 2H(13) - 2H(1) &= 1664\{\Theta(4) - 3\Theta(2)\} = 146432 & H(17) &= 136448 \end{aligned}$$

Mit den Werten von χ_8 folgt also $G = H + \chi_8$:

n	1	5	9	13	17
$H(n)$	0	1664	–9984	–4992	136448
$\chi_8(n)$	1	–1054	6561	–478	–63358
$G(n)$	1	610	–3432	–5470	73090

9.6 Rekursive Berechnungsformel für $G(4n+3)$

$q \to q^{\frac{1}{2}}$ in (9.33) liefert:

$$\begin{aligned}&-10(2\vartheta_2\vartheta_3)^3(\vartheta_3^2+\vartheta_2^2)^6+15(2\vartheta_2\vartheta_3)^5(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)^4-5(2\vartheta_2\vartheta_3)^7(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)^2\\ &=80\vartheta_2\vartheta_3^3(-\vartheta_2^2\vartheta_3^{12}+\vartheta_2^6\vartheta_3^8+\vartheta_2^{10}\vartheta_3^4-\vartheta_2^{14})=8\sum_{n=0}^{\infty}G(4n+3)q^{\frac{1}{4}(4n+3)} \qquad (9.36)\end{aligned}$$

Gleichung (8.7) lautet nach Elimination von ϑ_4^8:

$$\vartheta_2^2\vartheta_3^2\vartheta_4^8(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)=\vartheta_3^2(\vartheta_2^2\vartheta_3^{12}-\vartheta_2^6\vartheta_3^8-\vartheta_2^{10}\vartheta_3^4+\vartheta_2^{14})=4\sum_{n=0}^{\infty}\Theta(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)} \qquad (9.37)$$

Also ist mit den Reihen (1.2), (1.12), (9.36) und (9.37):

$$\begin{aligned}-80\underbrace{\left(q^{1/4}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(-1)^kq^{k^2+k}\right)}_{\frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Theta(2n+1)q^{\frac{1}{2}(2n+1)}\right)}_{\frac{1}{4}\vartheta_3^2(\vartheta_2^2\vartheta_3^{12}-\vartheta_2^6\vartheta_3^8-\vartheta_2^{10}\vartheta_3^4+\vartheta_2^{14})}\\ =\underbrace{\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kq^{k^2}\right)}_{\vartheta_4}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}G(4n+3)q^{\frac{1}{4}(4n+3)}\right)}_{10\vartheta_2\vartheta_3^3(-\vartheta_2^2\vartheta_3^{12}+\vartheta_2^6\vartheta_3^8+\vartheta_2^{10}\vartheta_3^4-\vartheta_2^{14})}\end{aligned}$$

Führe hier einen Koeffizientenvergleich vor $q^{\frac{1}{4}(4n+3)}=q^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{2}(2n+1)}$ durch:

$$\begin{aligned}G(4n+3)+2\sum_{\substack{k\geq 1\\ 4n+3-(2k)^2\geq 1}}(-1)^kG(4n+3-(2k)^2)\\ =-80\sum_{\substack{k\geq 0\\ n-(k^2+k)\geq 0}}(2k+1)(-1)^k\Theta(2n+1-2(k^2+k)) \qquad (9.38)\end{aligned}$$

Nun noch eine Liste der ersten Summanden, wobei diese Formel ausreicht für alle $4n+3\leq 59$:

$$\begin{aligned}G(4n+3)+2G(4n+3-4)-2G(4n+3-16)+2G(4n+3-36)\\ =-80(\Theta(2n+1)-3\Theta(2n+1-2) \qquad (9.39)\\ +5\Theta(2n+1-6)-7\Theta(2n+1-12)+9\Theta(2n+1-20)) \qquad (9.40)\end{aligned}$$

Für die Berechnung von $G(4n+3)$ benötigen wir wieder einige Werte von $\Theta(n)$:

n	1	3	5	7	9
$\Theta(n)$	1	12	–210	1016	-2043

Mit diesen erhalten wir in Formel (9.40) die $G(4n+3)$ für $n \leq 4$:

$$
\begin{aligned}
G(3) &= -80\Theta(1) = -80 & G(3) &= -80 \\
G(7) + 2G(3) &= -80\{\Theta(3) - 3\Theta(1)\} = -720 & G(7) &= -1120 \\
G(11) + 2G(7) &= -80\{\Theta(5) - 3\Theta(3)\} = 19680 & G(11) &= 14800 \\
G(15) + 2G(11) &= -80\{\Theta(7) - 3\Theta(5)\} = -131680 & G(15) &= -48800 \\
G(19) + 2G(15) - 2G(3) &= -80\{\Theta(9) - 3\Theta(7) + 5\Theta(3)\} = 402480 & G(19) &= 15600
\end{aligned}
$$

9.7 Wertetabellen

Wir haben in den vergangenen Kapiteln $G(4n+1)$ und $G(4n+3)$ berechnet. Nun können mit Hilfe der Verdopplungsformeln in Tabelle (9.30) die $G(n)$ für gerades n berechnet werden. Man erhält in Kombination mit χ_8 von Seite 55 die Anzahlen für 18 Quadrate:

n	$E_8(n)$	$E'_8(n)$	$\chi_8(n)$	$G(n)$	$G(2n)$	$A_{18}(n)$
1	1	1	1	1	–20	36
2	1	256	16	–20	144	612
3	–6560	6560	0	–80	–448	6528
4	1	65536	256	144	2240	48996
5	390626	390626	–1054	610	–12200	275400
6	–6560	1679360	0	–448	29440	1207680
7	–5764800	5764800	0	–1120	–6272	4269312
8	1	16777216	4096	2240	–81664	12573540
9	43040161	43040161	6561	–3423	68460	32041636
10	390626	100000256	–16864	–12200	87840	73617480
11	–214358880	214358880	0	14800	82880	157553280
12	–6560	429916160	0	29440	–474112	318102912
13	815730722	815730722	–478	–5470	109400	605381832
14	–5764800	1475788800	0	–6272	412160	1090632960
15	–2562506560	2562506560	0	–48800	–273280	1888224000
16	1	4294967296	65536	–81664	1059840	3176573796
17	6975757442	6975757442	–63358	73090	–1461800	5177295432
18	43040161	11018281216	104976	68460	–492912	8148505828
19	–16983563040	16983563040	0	15600	87360	12507419520
20	390626	25600065536	–269824	87840	1366400	18918517320

n	Darst.	$[a^6]$	$[a^4b^2]$	$[a^2b^2c^2]$	Beitrag	$G(n)$
1	100000_{12}	1	0	0	1	1
2	110000_{60}	2	2	0	–20	–20
3	111000_{160}	3	6	1	–80	–80
4	111100_{240}	4	12	4	80	144
	200000_{12}	64	0	0	64	
5	111110_{192}	5	20	10	560	610
	210000_{120}	65	20	0	50	
6	111111_{64}	6	30	20	512	–448
	211000_{480}	66	42	4	–960	
7	211100_{960}	67	66	13	–1120	–1120
8	211110_{960}	68	92	28	3520	2240
	220000_{60}	128	128	0	–1280	
9	211111_{384}	69	120	50	5088	–3423
	221000_{480}	129	168	16	–9240	
	300000_{12}	729	0	0	729	
10	221100_{1440}	130	210	40	–16800	–12200
	310000_{120}	730	90	0	4600	
11	221110_{1920}	131	254	73	4160	14800
	311000_{480}	731	182	9	10640	
12	222000_{160}	192	384	64	–5120	29440
	221111_{960}	132	300	116	22080	
	311100_{960}	732	276	28	12480	
13	222100_{960}	193	444	112	–10480	–5470
	311110_{960}	733	372	58	11120	
	320000_{120}	793	468	0	–6110	
14	222110_{1920}	194	506	172	35840	–6272
	311111_{384}	734	470	100	7168	
	321000_{960}	794	578	36	–49280	
15	222111_{1280}	195	570	245	73600	–48800
	321100_{2880}	795	690	85	–122400	

10 Zwanzig Quadrate

Wir setzen die Reihen (3.13d) und (3.15d) in die Linearkombination (2.27) ein:

$$\begin{aligned}
31\vartheta_3^{20} &= \left[\left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(1/2) - \left(f_\alpha^2\right)^{(8)}(\tau/2)\right]/(256\pi^{10}) + 77\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 - \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 \\
&= 31 - 8\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{m^9q^{2m}}{1-q^{2m}} + 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^9q^m}{1-q^{2m}} + 77\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 - \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 \\
&= 31 + 8\sum_{m=1}^{\infty}(1-(-q)^m)\frac{m^9q^m}{1-(-q)^{2m}} + 77\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 - \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 \\
&= 31 + 8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^9q^m}{1+(-q)^m} + 77\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 - \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8
\end{aligned}$$

Nun benennen wir die Koeffizienten der Restterme:

$$4\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 + \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 2^6\sum_{n=0}^{\infty}\chi_8^*(n)q^n \tag{10.1}$$

$$\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 2^8\sum_{n=0}^{\infty}L(n)q^n \tag{10.2}$$

Formel (3.19) lautet:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^9q^m}{1+(-q)^m} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\xi_9(n)q^n$$
$$\text{mit } \xi_9(n) = \sum_{d|n}(-1)^{d+\delta}d^9$$

Wir haben also folgende Anzahlformel für die Darstellung von n als Summe von 20 Quadraten gefunden:

$$\begin{aligned}
A_{20}(n) &= \frac{1}{31}\left(8(-1)^{n-1}\xi_9(n) + \frac{77}{4}\cdot 2^6\chi_8^*(n) - \left(\frac{77}{4}+1\right)\cdot 2^8L(n)\right) \\
&= \frac{8}{31}\left[(-1)^{n-1}\xi_9(n) + 154\chi_8^*(n) - 648L(n)\right] \qquad (10.3)
\end{aligned}$$

10.1 Explizite Formel für $\chi_8^*(n)$

Mit Formel (5.29) folgt eine explizite Darstellung für $\chi_8^*(n)$:

$$\begin{aligned}
4\vartheta_2^4\vartheta_3^{12}\vartheta_4^4 + \vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 2^6 \sum_{n=0}^{\infty} \chi_8^*(n) q^n &= 32 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4 \right) q^n \\
\Rightarrow \chi_8^*(n) &= \frac{1}{2} \sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4 \\
&= \frac{1}{24} \sum_{n,4} 3[a^8] - 28[a^6b^2] + 70[a^4b^4]
\end{aligned}$$

10.2 Explizite Formel für $L(n)$

Mit Formel (5.30) folgt eine explizite Darstellung für $L(n)$:

$$\begin{aligned}
\vartheta_2^8\vartheta_3^4\vartheta_4^8 = 2^8 \sum_{n=0}^{\infty} L(n) q^n &= 64 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^4b^4 - 6a^4b^2c^2 + 9a^2b^2c^2d^2 \right) q^n \\
\Rightarrow L(n) &= \frac{1}{4} \sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=n} a^4b^4 - 6a^4b^2c^2 + 9a^2b^2c^2d^2 \\
&= \frac{1}{24} \sum_{n,4} [a^4b^4] - 3[a^4b^2c^2] + 54[a^2b^2c^2d^2]
\end{aligned}$$

10.3 Wertetabellen

Wir werden nun die expliziten Formeln verwenden, um die Beiträge der echt unterschiedlichen Darstellungen von n als Summe von vier Quadraten (d.h. $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$) bis $n = 20$ zu berechnen. $\chi_8^*(n)$ und $L(n)$ ergeben sich dann in der darauffolgenden Tabelle als Summe aller Beiträge zum jeweiligen n. Wir benutzen die Notation aus Kapitel 6.3.

n	Darst.	$[a^8]$	$[a^6b^2]$	$[a^4b^4]$	$[a^4b^2c^2]$	$[a^2b^2c^2d^2]$	L	χ_8^*
1	1000_8	1	0	0	0	0	0	1
2	1100_{24}	2	2	1	0	0	1	20
3	1110_{32}	3	6	3	3	0	–8	68
4	1111_{16}	4	12	6	12	1	16	64
	2000_8	256	0	0	0	0	0	256
5	2100_{48}	257	68	16	0	0	32	–26
6	2110_{96}	258	138	33	24	0	–156	–3120
7	2111_{64}	259	210	51	75	4	112	–4088
8	2200_{24}	512	512	256	0	0	256	5120
9	2210_{96}	513	648	288	144	0	–576	14220
	3000_8	6561	0	0	0	0	0	6561
10	2211_{96}	514	786	321	336	16	708	8016
	3100_{48}	6562	738	81	0	0	162	9384
11	3110_{96}	6563	1478	163	99	0	–536	–41140
12	2220_{32}	768	1536	768	768	0	–2048	17408
	3111_{64}	6564	2220	246	300	9	–448	–67328
13	2221_{64}	769	1740	816	1200	64	1792	28552
	3200_{48}	6817	3492	1296	0	0	2592	26790
14	3210_{192}	6818	4298	1393	504	0	–952	–19040
15	3211_{192}	6819	5106	1491	1131	36	336	–145128
16	2222_{16}	1024	3072	1536	3072	256	4096	16384
	4000_8	65536	0	0	0	0	0	65536
17	3220_{96}	7073	7496	2848	2448	0	–17984	42764
	4100_{48}	65537	4112	256	0	0	512	198790
18	3221_{192}	7074	8370	2961	3600	144	–504	–46944
	3300_{24}	13122	13122	6561	0	0	6561	131220
	4110_{96}	65538	8226	513	288	0	–1404	8784
19	3310_{96}	13123	14598	6723	1539	0	8424	404940
	4111_{64}	65539	12342	771	867	16	–2576	–253304
20	3311_{96}	13124	16076	6886	3276	81	5728	285056
	4200_{48}	65792	17408	4096	0	0	8192	–6656

Nun berechnen wir noch $\xi_9(n)$ und $A_{20}(n)$:

n	Teiler von n	$\xi_9(n)$	$L(n)$	$\chi_8^*(n)$	$A_{20}(n)$
1	1	1	0	1	40
2	1,2	–513	1	20	760
3	1,3	19684	–8	68	9120
4	1,2,4	–261633	16	320	77560
5	1,5	1953126	32	–26	497648
6	1,2,3,6	–10097892	–156	–3120	2508000
7	1,7	40353608	112	–4088	10232640
8	1,2,4,8	–133955073	256	5120	34729720
9	1,3,9	387440173	–576	20781	100906760
10	1,2,5,10	–1001953638	870	17400	259114704
11	1,11	2357947692	–536	–41140	606957280
12	1,2,3,4,6,12	–5149983972	–2496	–49920	1327461600
13	1,13	10604499374	4384	55342	2738111280
14	1,2,7,14	–20701400904	–952	–19040	5341699520
15	1,3,5,15	38445332184	336	–145128	9915552192
16	1,2,4,8,16	–68584996353	4096	81920	17701924600
17	1,17	118587876498	–17472	241554	30615844560
18	1,2,3,6,9,18	–198756808749	4653	93060	51294999960
19	1,19	322687697780	5848	151636	83279292960
20	1,2,4,5,10,20	–511002214758	13920	278400	131880275664

11 Ergebnisse

11.1 Formeln

Wir haben nun die Anzahlformeln auf die Formeln in Kapitel 3.5, sowie einige Restfunktionen zurückgeführt.

$$A_2(n) = 4E_0'(n) = 4E_0(n) \tag{11.1a}$$
$$A_4(n) = 8(-1)^{n-1}\xi_1(n) \tag{11.1b}$$
$$A_6(n) = 16E_2'(n) - 4E_2(n) \tag{11.1c}$$
$$A_8(n) = 16(-1)^{n-1}\zeta_3(n) \tag{11.1d}$$
$$A_{10}(n) = \frac{4}{5}\{16E_4'(n) + E_4(n) + 8\chi_4(n)\} \tag{11.1e}$$
$$A_{12}(n) = 8\{(-1)^{n-1}\xi_5(n) + 2\Omega(n)\} \tag{11.1f}$$
$$A_{14}(n) = \frac{4}{61}\left\{64E_6'(n) - E_6(n) + 364W(n)\right\} \tag{11.1g}$$
$$A_{16}(n) = \frac{32}{17}(-1)^{n-1}\{\zeta_7(n) + 16\Theta(n)\} \tag{11.1h}$$
$$A_{18}(n) = \frac{4}{1385}\left\{E_8(n) + 256E_8'(n)\right\} + \frac{88}{65}\chi_8(n) - \frac{4896}{3601}\{10G(n) + G(2n)\} \tag{11.1i}$$
$$A_{20}(n) = \frac{8}{31}\left[(-1)^{n-1}\xi_9(n) + 154\chi_8^*(n) - 648L(n)\right] \tag{11.1j}$$

Ausgeschrieben lauten die (asymptotisch dominierenden) Hauptfunktionen ($\delta := n/d$):

$$E_t(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1(2)}} (-1)^{d/2-1/2} d^t = \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 1(4)}} d^t - \sum_{\substack{d|n \\ d\equiv 3(4)}} d^t \tag{11.2a}$$

$$E_t'(n) = \sum_{\substack{d|n \\ \delta\equiv 1(2)}} (-1)^{\delta/2-1/2} d^t = \sum_{\substack{d|n \\ \delta\equiv 1(4)}} d^t - \sum_{\substack{d|n \\ \delta\equiv 3(4)}} d^t \tag{11.2b}$$

$$\xi_t(n) = \sum_{d|n} (-1)^{d+\delta} d^t \tag{11.2c}$$

$$\zeta_t(n) = \sum_{d|n} (-1)^{d-1} d^t \tag{11.2d}$$

Die expliziten Formeln der Restfunktionen lauten:

$$\chi_4(n) = \frac{1}{4} \sum_{a^2+b^2=n} (a+ib)^4 = \frac{1}{2} \sum_{a^2+b^2=n} \left(a^4 - 3a^2b^2\right) \tag{11.3a}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n,2} \left[a^4\right] - 6\left[a^2b^2\right] \tag{11.3b}$$

$$\Omega(n) = \frac{1}{8} \sum_{\substack{a^2+b^2+c^2\\+d^2=n}} (a+i_1b+i_2c+i_3d)^4 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a^2+b^2+c^2\\+d^2=n}} \left(a^4 - 3a^2b^2\right) \tag{11.3c}$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{n,4} \left[a^4\right] - 2\left[a^2b^2\right] \tag{11.3d}$$

$$W(n) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a^2+b^2+c^2+d^2\\+e^2+f^2=n}} \left(a^4 - 3a^2b^2\right) \tag{11.3e}$$

$$= \frac{1}{60} \sum_{n,6} 5[a^4] - 6[a^2b^2] \tag{11.3f}$$

$$\Theta(n) = \frac{2-(-1)^n}{6} \sum_{\substack{a^2+b^2+c^2\\+d^2=n}} \left(a^6 - 15a^4b^2 + 30a^2b^2c^2\right) \tag{11.3g}$$

$$= \frac{2-(-1)^n}{24} \sum_{n,4} \left[a^6\right] - 5\left[a^4b^2\right] + 30\left[a^2b^2c^2\right] \tag{11.3h}$$

$$\chi_8(n) = \frac{1}{4} \sum_{a^2+b^2=n} (a+ib)^8 = \frac{1}{2} \sum_{a^2+b^2=n} (a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4) \tag{11.3i}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n,2} \left[a^8\right] - 28\left[a^6b^2\right] + 70\left[a^4b^4\right] \tag{11.3j}$$

$$G(n) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a^2+b^2+c^2+d^2\\+e^2+f^2=n}} \left(a^6 - 15a^4b^2 + 30a^2b^2c^2\right) \tag{11.3k}$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{n,6} [a^6] - 3[a^4b^2] + 9[a^2b^2c^2] \tag{11.3l}$$

$$\chi_8^*(n) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a^2+b^2+c^2\\+d^2=n}} \left(a^8 - 28a^6b^2 + 35a^4b^4\right) \tag{11.3m}$$

$$= \frac{1}{24} \sum_{n,4} 3[a^8] - 28[a^6b^2] + 70[a^4b^4] \tag{11.3n}$$

$$L(n) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{a^2+b^2+c^2\\+d^2=n}} \left(a^4b^4 - 6a^4b^2c^2 + 9a^2b^2c^2d^2\right) \tag{11.3o}$$

$$= \frac{1}{24} \sum_{n,4} [a^4b^4] - 3[a^4b^2c^2] + 54[a^2b^2c^2d^2] \tag{11.3p}$$

11.2 Tabellen

Wir haben außerdem alle Funktionen, die in den Gleichungen (11.1) vorkommen, bis $n = 20$ berechnet. Es würde den Rahmen sprengen, hier alle Tabellen aufzulisten, daher nur die Tabelle der Anzahlen.

n	A_2	A_4	A_6	A_8	A_{10}	A_{12}
1	4	8	12	16	20	24
2	4	24	60	112	180	264
3	0	32	160	448	960	1760
4	4	24	252	1136	3380	7944
5	8	48	312	2016	8424	25872
6	0	96	544	3136	16320	64416
7	0	64	960	5504	28800	133056
8	4	24	1020	9328	52020	253704
9	4	104	876	12112	88660	472760
10	8	144	1560	14112	129064	825264
11	0	96	2400	21312	175680	1297056
12	0	96	2080	31808	262080	1938336
13	8	112	2040	35168	386920	2963664
14	0	192	3264	38528	489600	4437312
15	0	192	4160	56448	600960	6091584
16	4	24	4092	74864	840500	8118024
17	8	144	3480	78624	1137960	11368368
18	4	312	4380	84784	1330420	15653352
19	0	160	7200	109760	1563840	19822176
20	8	144	6552	143136	2050344	24832944

n	A_{14}	A_{16}	A_{18}	A_{20}
1	28	32	36	40
2	364	480	612	760
3	2912	4480	6528	9120
4	16044	29152	48996	77560
5	64792	140736	275400	497648
6	200928	525952	1207680	2508000
7	503360	1580800	4269312	10232640
8	1089452	3994080	12573540	34729720
9	2186940	8945824	32041636	100906760
10	4196920	18626112	73617480	259114704
11	7544992	36714624	157553280	606957280
12	12547808	67978880	318102912	1327461600
13	19975256	118156480	605381832	2738111280
14	31553344	197120256	1090632960	5341699520
15	48484800	321692928	1888224000	9915552192
16	70439852	509145568	3176573796	17701924600
17	99602104	772845120	5177295432	30615844560
18	142487436	1143441760	8148505828	51294999960
19	200569824	1681379200	12507419520	83279292960
20	268594872	2428524096	18918517320	131880275664

Literaturverzeichnis

[Rad] Hans Rademacher: *Topics in analytic number theory*, Kap. 10-11; In: Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 169, Springer-Verlag, Berlin, 1973

[WW] E. T. Whittaker und G. N. Watson: *A Course of Modern Analysis*, Kap. XXI – The Theta Functions; Cambridge University Press, Fourth Edition (1927)

[Boul] Boulyguine, M. B.: *Sur la représentation d'un nombre entier par une somme de carrés.*; in: Comptes Rendus Hebdomadaires de Séances de l'Académie des Sciences **161**(1915), pp. 28-30.

[Dick] Leonard Eugene Dickson: *History of the theory of numbers, Vol. 2 – Diophantine Analysis*, Kap. 9; 1920 [Reprint 1952: Chelsea Publishing Company, New York]

[Har] Godfrey Harold Hardy: *Ramanujan – Twelve Lectures*, Lecture 9 – „The representation of numbers as sums of squares"; Chelsea Publishing Co., New York 1940

[FrBu] Eberhard Freitag, Rolf Busam: *Funktionentheorie 1*; 4. Aufl., Springer, Berlin 2006

[Con] John Horton Conway, Neil James Alexander Sloane: *Sphere Packings, Lattices and Groups*, pp. 101-108; In: Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 290, Springer-Verlag, New York, 1988

[Bell] Richard Bellman: *A Brief Introduction to Theta Functions*, §44-45; Holt, Rinehart and Winston, New York 1961

[Gro] Emil Grosswald: *Representations of Integers as Sums of Squares*, Introduction; Springer, New York 1985

[Ran1] Robert Alexander Rankin: *On the representations of a number as a sum of squares and certain related identities*; Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **41** (1945), pp. 1-11

[Ran2] R. A. Rankin: *A certain class of multiplicative functions*; Duke Math. J. **13** (1946), pp. 281-306

[Ran3] R. A. Rankin: *On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of twenty*; Acta Arithmetica **7** (1962), pp. 399-407

[Ran4] R. A. Rankin: *Sums of squares and cusp forms*; Amer. J. Math. **87** (1965), pp. 857-860

[Ran5] R. A. Rankin: *Modular forms and functions*, §7; Cambridge University Press, Cambridge 1977

[Ran6] R. A. Rankin: *Fourier coefficients of cusp forms*; Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **100** (1986), pp. 5-29

[Gla1] James Whitbread Lee Glaisher: *On the series which represent the twelve elliptic and the four zeta functions*; Messenger of Math. **18** (1889), pp. 1-83

[Gla2] J. W. L. Glaisher: *On the representations of a number as a sum of four squares, and on some allied arithmetical functions*; Quart. J. Math. **36** (1905), pp. 305-358

[Gla3] J. W. L. Glaisher: *The arithmetical functions* $P(m)$, $Q(m)$, $\Omega(m)$; Quart. J. Math. **37** (1906), pp. 36-48

[Gla4] J. W. L. Glaisher: *On the representations of a number as the sum of two, four, six, eight, ten and twelve squares*; Quart. J. Math. **38** (1907), pp. 1-62

[Gla5] J. W. L. Glaisher: *On the representations of a number as the sum of fourteen and sixteen squares*; Quart. J. Math. **38** (1907), pp. 178-236

[Gla6] J. W. L. Glaisher: *On the representations of a number as the sum of eighteen squares*; Quart. J. Math. **38** (1907), pp. 289-351

[Gla7] J. W. L. Glaisher: *On the numbers of representations of a number as a sum of* $2r$ *squares, where* $2r$ *does not exceed eighteen*; Proc. London Math. Soc. **5** (1907), pp. 479-490

[Gla8] J. W. L. Glaisher: *On elliptic expansions in which the coefficients are powers of the complex numbers having* n *as norm*; Quart. J. Math. **39** (1908), pp. 266-300

[Gla9] J. W. L. Glaisher: *On the quantities* $K, E, J, G, K', E', J', G'$ *in elliptic functions*; Quart. J. Math. **20** (1885), pp. 313-361

[BB] Jonathan Michael Borwein und Peter Benjamin Borwein: *Pi & the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, Kapitel 2.1 "A Theta Series Solution to the AGM", Wiley, New York, 1987.

Auf dem Titelbild sieht man die Möglichkeiten, die Zahl 25 als Summe zweier *Quadrate darzustellen – es lässt sich also* $A_2(25) = 12$ *abzählen.*

Im folgenden Bild ist $\mathbb{Z}^4$ *abgebildet, indem in jedem Punkt von* $\mathbb{Z}^2$ *eine Kopie von* $\mathbb{Z}^2$ *eingefügt ist. Die Gesamtheit der grauen Kreise bildet eine* vierdimensionale *Kugel mit Radius drei – man kann also* $A_4(9) = 8+96 = 104$ *abzählen (8 Punkte mit* $9+0+0+0$*, 96 Punkte mit* $4+4+1+0$*):*