МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕЧКА

И. М. ЯГЛОМ

КАК РАЗРЕЗАТЬ КВАДРАТ?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕЧКА

И. М. ЯГЛОМ

КАК РАЗРЕЗАТЬ КВАДРАТ?

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

511
Я 29
УДК 511

Яглом И. М.

Я 29 Как разрезать квадрат?
М. «Наука», 1968
112 с. («Математическая библиотечка»)

В книге популярно изложен круг вопросов, связанных с древней задачей о том, как разрезать квадрат на попарно различные квадраты.

Рассмотрены и различные обобщения этой задачи. Книга рассчитана на школьников старших классов и студентов-математиков младших курсов. Она может быть использована также в работе школьных или студенческих математических кружков.

2-2-2
145-68

511

2-2-2
145-68

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1965 г. в серии «Математическая библиотечка» были изданы две книги, посвященные так называемой «комбинаторной геометрии», т. е. разделу геометрии, изучающему связанные с целыми числами комбинаторные задачи, относящиеся к дискретным расположениям точек или геометрических фигур [1]). Можно считать, что настоящая книга продолжает этот ряд книг по комбинаторной геометрии, поскольку рассматриваемая здесь задача является, по существу, комбинаторной проблемой о расположениях на плоскости конечных систем квадратов, удовлетворяющих некоторым наперед заданным условиям.

Конечно, задачу, которой посвящена эта книга, вряд ли кто-либо сочтет особенно серьезной — это есть типичный вопрос из области «математических развлечений», какие охотно печатают журналы для семейного чтения в разделе «В субботний вечер». Однако вокруг на первый взгляд достаточно простого вопроса возникает так много любопытных соображений, относящихся к разным разделам математики и физики, вопрос этот с такой легкостью приводит к иным вопросам, явно безнадежно трудным (да и сама основная задача долго казалась неразрешимой даже таким серьезным ученым, как один из виднейших наших математиков первой половины этого века академик Н. Н. Лузин!), первоначальная постановка вопроса так естественно обрастает разнообразными аналогами и вариантами, что мне захотелось побеседовать на столь, казалось бы, несолидную тему (см., впрочем, список литературы на стр. 109—111) с начинающими математиками. Мне кажется, что книга эта, рас-

[1]) Г. Хадвигер и Г. Дебруннер, Комбинаторная геометрия плоскости, «Наука», 1965; В. Г. Болтянский и И. Ц. Гохберг, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, «Наука», 1965.

считанная на интересующихся математикой учащихся старших классов средней школы, на учителей математики и на будущих учителей — студентов математических отделений педагогических институтов или университетов, может дать некоторое представление о «математическом мышлении»: здесь мы имеем определенный «фрагмент математики», иллюстрирующий на одном примере некоторые достаточно характерные для математики ходы мысли, приемы, методы. Именно это обстоятельство явилось для автора книги решающим — здесь интересны, в первую очередь, не результаты, а приводящие к этим результатам рассуждения, заслуживает внимания не столько «что» (доказывается), сколько «как» (доказывается). И я хочу заранее подчеркнуть, что собранные в конце книги «нерешенные задачи» I—X (точнее было бы сказать — задачи, решение которых неизвестно автору книги), большинство из которых являются, вероятно, достаточно трудными, не заслуживают, по моему мнению, того, чтобы тратить на них серьезные усилия: эти задачи приведены для иллюстрации сложности рассматриваемой здесь проблематики, а не как рекомендуемые темы самостоятельной научной работы. В противоположность этому включенные в основной текст книги задачи 1—20 (некоторые из которых, впрочем, тоже вовсе не просты) могут доставить читателю возможность полезной самопроверки; поэтому всякому, пожелавшему убедиться в полном овладении излагаемым в книге материалом, стоит попробовать решить эти задачи.

При написании этой книги автор частично использовал составленный им некогда цикл задач для указанной на стр. 111 книги [24]. Рукопись книги была внимательно прочитана В. Г. Болтянским, дружеская критика которого бесспорно способствовала улучшению текста. Много выиграла книга также от тщательной и компетентной работы ее редактора Ф. И. Кизнер. В процессе работы над книгой автор неоднократно советовался с А. М. Ягломом; при выполнении эскизов чертежей ему помогали М. С. Королева и Л. Н. Кузнецова. Автору приятно поблагодарить всех перечисленных лиц за помощь и внимание к его книге.

Февраль 1967 *И. М. Яглом*

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга посвящена следующей задаче: *разрезать квадрат К на некоторое число меньших квадратов*. Правда, в такой формулировке поставленная задача не представляет ни

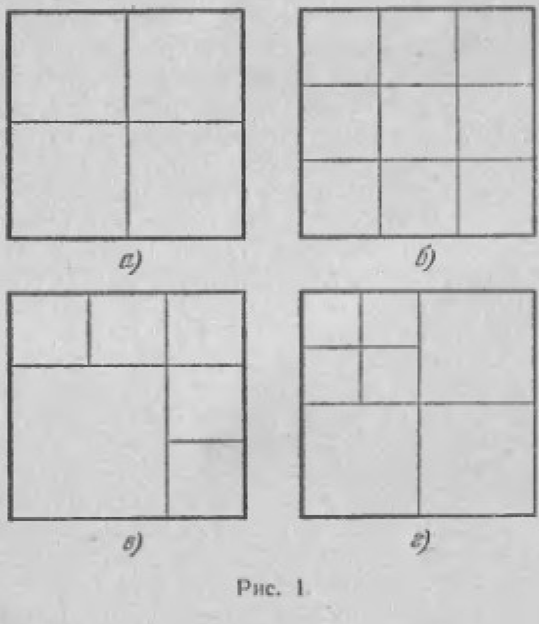


Рис. 1

малейшего интереса: совершенно ясно, как разрезать квадрат на 4 (рис. 1,*а*) или на 9 (рис. 1,*б*) меньших квадратов; если же не требовать, чтобы квадраты, на которые разрезается квадрат *К*, были обязательно все равны между собой, то число квадратов, на которые разрезается квадрат *К*, может быть сделано равным и 6 (рис. 1,*в*) или 7 (рис. 1,*г*). Однако стоит лишь потребовать, чтобы *все квадраты, на которые разрезается квадрат К, были различны* — и задача сразу же становится совсем не простой.

В течение длительного времени математики предполагали даже, что эта последняя задача вообще не имеет решения. В изданной в 1930 г. в Брюсселе книге известного знатока «математических развлечений» И. Крайчика [3] [1]) говорилось: «*Невозможно разбить данный квадрат на конечное число попарно неравных квадратов. Это предложение, которое пока не доказано, по-видимому, верно; нам это сообщил г-н Лузин, профессор из Москвы*». Более осторожно отозвался об этой задаче замечательный польский математик Гуго Штейнгауз в своей книге «Математический калейдоскоп» [6], вышедшей в свет первым изданием во Львове в 1938 г.: «*Неизвестно, можно ли разбить квадрат на неповторяющиеся квадраты*» [2]); однако и он как будто предполагал, что это невозможно. Гипотеза о том, что квадрат нельзя разбить на попарно неравные квадраты, подкреплялась тем, что, хотя исследованиями японского математика М. Абе [4] и немецкого геометра А. Штёра [8] была установлена разрешимость многих задач, близких к задаче о разрезании квадрата на неповторяющиеся меньшие квадраты, сама эта задача оставалась нерешенной.

Известный немецкий математик и педагог Г. Мешковский рассказывает в своей книге [25], что немецкий геометр Р. Шпраг также первоначально принадлежал к лицам, считавшим, что квадрат нельзя разрезать на попарно различные квадраты. Он с увлечением искал доказательство этого — и в процессе поиска пришел к совершенно неожиданным для самого себя выводам: в 1939 г. Р. Шпраг [9] показал, что *каждый квадрат можно разрезать на 55 попарно различных квадратов*. Число 55 довольно скоро было уменьшено, причем неожиданным образом последующие успехи в рассматриваемом здесь направлении оказались связанными с физическими соображениями: очень существенную роль здесь сыграла установленная группой сотрудников Кембриджского университета в Англии связь между

---

[1]) Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы, помещенному в конце книги.

[2]) Это утверждение было воспроизведено и в вышедшем в 1949 г. русском переводе книги Штейнгауза, хотя к этому времени вопрос был уже решен.

задачей о разрезании квадрата и *задачей составления электрической цепи, удовлетворяющей определенным условиям* (см. § 2 настоящей книги). Опираясь на эту связь, в 1940 г. английские математики А. Г. Стон и У. Т. Татти [11] установили, что *каждый квадрат можно* (и притом даже двумя различными способами!) *разрезать на 28 попарно различных квадратов*. В появившейся же почти сразу вслед за этим большой статье английской группы (Р. Л. Брукс, К. А. Б. Смит, А. Г. Стон и У. Т. Татти [13]) был приведен пример *разбиения квадрата на 26 попарно неравных квадратов* (это разбиение было воспроизведено в русских книгах [23] и [24]). Однако и это разбиение не является «самым экономным»: в 1948 г. в популярном среди шахматистов журнале Fairly Chess Review[1]) появилась заметка англичанина Ф. Г. Вилькокса [18], в которой он указал, что каждый квадрат можно разрезать на 24 попарно неравных квадрата (см. также [21]; это разбиение воспроизведено во 2-м издании «Математического калейдоскопа» Г. Штейнгауза [6], изданного в Варшаве в 1954 г.). *До сих пор неизвестно, можно ли разрезать квадрат меньше чем на 24 попарно различных квадрата* (см. задачу 1а) на стр. 105).

Можно пытаться разрезать на квадраты и иные выпуклые многоугольники. Впрочем, легко понять, что из квадратов (или даже из произвольных прямоугольников!) нельзя сложить никакого выпуклого многоугольника M, отличного от прямоугольника. В самом деле, нетрудно видеть, что если какой-то выпуклый многоугольник M покрыт прямоугольниками без просветов и двойных покрытий, то стороны всех этих прямоугольников взаимно параллельны. Действительно, выберем какую-либо сторону l многоугольника M. Очевидно, все прямоугольники, примыкающие к l, имеют сторону, параллельную l; все прямоугольники, примыкающие к какому-либо из уже рассмотренных прямоугольников, имеют сторону, параллельную l, и т. д. Так как таким путем мы можем исчерпать все прямоугольники покрытия, то *все они имеют сторону, параллельную* l.

Отсюда следует, что все стороны многоугольника M параллельны l или перпендикулярны к l. А так как выпуклый многоугольник не может иметь более двух параллельных сторон (это следует из определения выпуклого многоуголь-

---

[1]) «Честное шахматное обозрение».

ника как такого, который лежит по одну сторону от каждой своей стороны), то *многоугольник М должен быть прямоугольником.*

Таким образом, остается выяснить, можно ли разрезать на попарно различные квадраты какой-либо прямоугольник *Р*. В книге М. Крайчика [3], в которой одна глава была специально посвящена подобным вопросам, фигурировали лишь примеры разбиения прямоугольника на квадраты, некоторые из которых равны — возможно, что в 1930 г. он еще не знал, что существуют прямоугольники, которые можно разбить на неповторяющиеся квадраты. Однако в это время примеры такого рода уже были известны: по-видимому, первое разбиение прямоугольника на попарно неравные квадраты было указано польским математиком З. Мороном [2] в 1925 г.—за 5 лет до выхода книги [3]. (В 1939 г. это разбиение было повторно найдено индийским математиком С. Чоулой [7].) Г. Штейнгауз в первом издании книги [6] отмечает, что *«из девяти квадратов со сторонами* 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18 *можно сложить прямоугольник»* (разбиение Морона), но указывает, что *«неизвестно, можно ли составить прямоугольник из неповторяющихся квадратов с меньшими сторонами»*. Однако во втором издании той же книги уже сообщается, что указанное разбиение прямоугольника на девять попарно различных квадратов является самым простым из всех возможных разбиений такого рода — к моменту выхода в свет 2-го издания книги [6] вопрос о простейших разбиениях прямоугольников на попарно неравные квадраты был решен полностью. Второе разбиение прямоугольника на девять квадратов (со сторонами 2, 5, 7, 9, 16, 25, 33 и 36) было указано впервые в 1940 г. в уже называвшемся обширном мемуаре Р. Л. Брукса, К. А. Б. Смита, А. Г. Стона и У. Т. Татти [13] и одновременно в маленькой заметке немецких геометров Г. Тёпфкена и Г. Рейхардта [10]; при этом в обеих статьях указывалось, что *меньше чем из девяти попарно различных квадратов сложить прямоугольник нельзя*. В статье [13] были также указаны все возможные (довольно многочисленные!) *разложения прямоугольника на* 10 *или* 11 *попарно неравных квадратов*. В 1946—1947 гг. начатый английскими авторами список был продолжен голландским математиком Е. Я. Баукампом [15], который, опираясь на развитые в статье [13] методы, перечислил все возможные разложения прямоугольника на 9, 10, 11, 12 или 13 попарно неравных квадратов; всех таких разложений оказалось 585 (!). В 1941 г. на VII Московской математической олимпиаде учащимся 7—8 классов было предложено доказать, что *ни из каких пяти попарно неравных квадратов сложить прямоугольник нельзя*, а учащимся 9—10 классов была задана аналогичная задача, где только число «п я т ь» было заменено на число «ш е с т ь» (см. [30]); эти задачи получили довольно много решений и при разборе решений задач олимпиады школьникам было предложено дома попытаться самостоятельно установить, что также и из с е м и или из в о с ь м и попарно различных квадратов сложить прямоугольник нельзя.

После того как было показано, что по крайней мере некоторые прямоугольники — и в том числе все квадраты — можно разрезать на попарно неравные квадраты, встал вопрос о том, не справедливо ли это утверждение для в с е х без исключения прямоугольников. Впрочем, в такой форме утверждение было опровергнуто очень давно — задолго до установления всех упомянутых выше фактов. Еще в 1903 г. известный немецкий математик Макс Д е н опубликовал статью [1], которую можно считать первой в ряду интересующих нас здесь исследований; в этой статье он показал, *что никакой прямоугольник с несоизмеримыми сторонами не может быть разрезан на квадраты* (безразлично — попарно различные или такие, среди которых встречаются и одинаковые!). С другой стороны, было установлено, что весьма многие прямоугольники могут быть разбиты на попарно различные квадраты: еще в 1932 г. М. А б е [4] показал, что среди таких прямоугольников существуют *сколь угодно близкие к квадрату*, а в обширной диссертации А. Ш т ё р а [8] было установлено, что среди них есть прямоугольники, *сколь угодно близкие к любому наперед заданному прямоугольнику*.

Окончательное решение вопроса о том, какие п р я м о у г о л ь н и к и можно разложить на попарно неравные квадраты, было дано Шпрагом, который, как уже отмечалось, первым решил и вопрос о возможности разбиения к в а д р а т а на попарно неравные квадраты. После работы М. Д е н а [1] «под подозрением» оставались лишь *прямоугольники с соизмеримыми сторонами* — и для таких прямоугольников Р. Ш п р а г [12] доказал, что *каждый из них может быть разрезан на попарно неравные квадраты*. Независимо от Шпрага тот же результат получили и

Р. Л. Брукс, К. А. Б. Смит, А. Г. Стон и У. Т. Татти ([13], § 9). Предложения Дена и Шпрага совместно можно назвать «основной теоремой» рассматриваемой в этой книге «теории разрезания прямоугольников и квадратов»; в известном смысле они «закрывают» тематику, начинающуюся вынесенным в заголовок настоящей книги вопросом (см., впрочем, список нерешенных задач на стр. 105—108).

Другие многочисленные задачи и теоремы, родственные только что перечисленным, читатель найдет в тексте этой книги.

§ 1. СКЛАДЫВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ИЗ КВАДРАТОВ И РАЗРЕЗАНИЕ КВАДРАТА

Начнем с вопроса о том, *на какое наименьшее число попарно неравных квадратов можно разрезать прямоугольник*. Так как нам удобнее будет при решении этой задачи считать заданным не прямоугольник, а квадраты, на которые прямоугольник разрезается, то мы будем здесь говорить о задаче *составления прямоугольника из некоторого числа попарно не равных друг другу квадратов*.

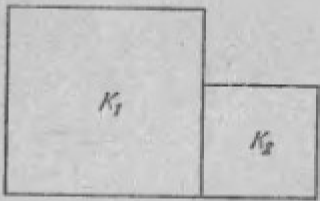


Рис. 2.

Разумеется, ясно, что из двух неравных квадратов составить прямоугольник нельзя. Более того, понятно, что нельзя составить прямоугольник и из трех попарно неравных квадратов: ведь два приложенных друг к другу квадрата образуют, по крайней мере, один «пустой» угол, причем одна сторона этого «пустого» угла совпадает со стороной меньшего из двух квадратов (рис. 2), так что его никак нельзя заполнить квадратом, отличным по величине от уже имеющихся квадратов.

Аналогично можно доказать, что прямоугольник нельзя составить и из четырех квадратов; однако нам будет удобнее воспользоваться другим, несколько более общим соображением. А именно, докажем, что *если из какого-то числа попарно различных квадратов сложен прямоугольник*

P, то квадраты, примыкающие к *с а м о м у   м а л е н ь к о м у* *квадрату* K_1, *расположены либо так, как это изображено на рис.* 3, *а*, *либо так, как это изображено на рис.* 3, *б* (эти два расположения несущественно отличаются друг от друга: одно получается из другого симметрией относительно прямой).

Действительно, пусть $K_1 \equiv ABCD$ — самый маленький квадрат из числа тех, которые составляют прямоугольник P. Очевидно, что, по крайней мере, к одной из сторон квадрата K_1, например к AB, примыкает сторона какого-то другого квадрата K_2. По предположению, сторона квадрата K_2 б о л ь ш е AB; поэтому одна из вершин A или B лежит

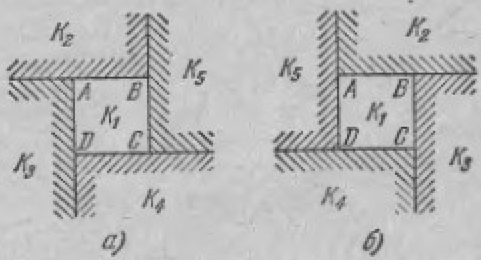


Рис. 3.

внутри стороны квадрата K_2. Пусть, например, этим свойством обладает вершина A. Покажем, что в этом случае имеет место расположение, изображенное на рис. 3,*а* [1]). Ясно, что возникающий при точке A пустой угол должен быть заполнен некоторым квадратом K_3. По предположению, сторона квадрата K_3 больше стороны AD; поэтому при вершине D также образуется пустой угол, который должен заполняться квадратом K_4. Аналогично, пустой угол при вершине C заполняется квадратом K_5. Так как сторона квадрата K_5 больше CB, то она выступает за точку B; поэтому правая вершина квадрата K_2 лежит на стороне AB квадрата K_1, т. е. или лежит внутри AB, или совпадает с B.

Покажем, что в действительности имеет место второй случай. В самом деле, если правая вершина квадрата K_2

---

[1]) Если бы внутри стороны квадрата K_2 лежала не вершина A, а вершина B, то вместо расположения рис. 3, *а* мы пришли бы к расположению рис. 3, *б*.

лежит внутри стороны AB (рис. 4), то правая сторона квадрата и выступающая за BC часть левой стороны квадрата K_5 образуют «колодец», который у́же квадрата K_1 и поэтому может быть заполнен лишь квадратами, меньшими K_1. Но согласно сделанному нами предположению таких квадратов нет.

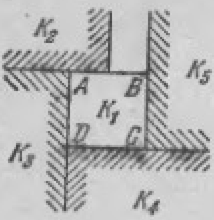


Рис. 4.

Из доказанного утверждения сразу вытекают два следствия:

1°. *Число квадратов, из которых можно сложить прямоугольник P, должно быть не меньше пяти.*

2°. *Самый маленький квадрат должен лежать внутри прямоугольника P.*

Итак, самый маленький квадрат и прилегающие к нему квадраты должны образовывать одну из двух зеркально-симметричных конфигураций, изображенных на рис. 3. Но если бы мы смогли сложить прямоугольник, исходя из одной из указанных конфигураций, то автоматически можно было бы сложить зеркально-симметричный (т. е. равный предшествующему!) прямоугольник, исходя из второй конфигурации; поэтому раз и навсегда условимся считать, что наименьший квадрат и прилегающие к нему квадраты образуют конфигурацию, изображенную на рис. 3, a.

Предположим, что из некоторых пяти квадратов можно сложить прямоугольник. Тогда «свободные» (т. е. не примыкающие к сторонам каких-либо других из этих пяти квадратов) стороны квадратов K_2, K_3, K_4 и K_5 должны попарно принадлежать одной прямой, т. е. наши квадраты должны быть расположены так, как это изображено на рис. 5.

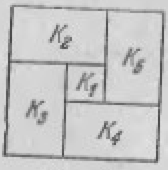


Рис. 5.

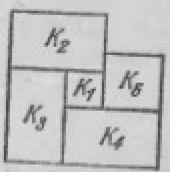


Рис. 6.

В дальнейшем мы всегда будем обозначать сторону квадрата K_1 через a_1, сторону квадрата K_2 — через a_2 и т. д. В таком случае, очевидно, имеем (см. рис. 5)

$$a_2 = a_3 + a_1, \quad a_3 = a_4 + a_1, \quad a_4 = a_5 + a_1, \quad a_5 = a_2 + a_1,$$

т. е.

$$a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_2.$$

Полученное противоречие и показывает, что *ни из каких пяти попарно неравных квадратов сложить прямоугольник нельзя.*

Таким образом, мы видим, что пять квадратов, расположенных так, как это изображено на рис. 3, *а* (или на рис. 5), не могут образовывать прямоугольник. С другой стороны, какие-то пять квадратов обязательно располагаются как на рис. 3, *а* (или как на рис. 3, *б*). Но если какая-то пара соседних квадратов образует пустой угол (рис. 6), то шестого квадрата, как мы уже отмечали выше (стр. 12), будет недостаточно, чтобы этот угол заполнить. Поэтому *из шести квадратов составить прямоугольник* тоже *нельзя.*

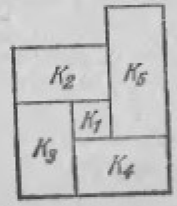


Рис. 7.

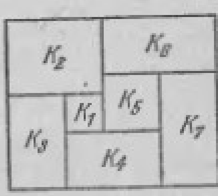


Рис. 8.

Попытаемся теперь сложить прямоугольник из семи квадратов. Ясно, что в основной конфигурации пяти квадратов должен быть только один незаполненный угол, так как в противном случае двух квадратов для заполнения двух пустых углов было бы мало. Пусть это будет угол, образованный квадратами K_2 и K_5. Нетрудно видеть, что квадрат K_2 возвышается над квадратом K_5 (см. рис. 6) [1]). Действительно, в противном случае (рис. 7) мы имели бы

$$a_2 = a_3 + a_1, \quad a_3 = a_4 + a_1, \quad a_4 = a_5 + a_1, \quad a_5 > a_2 + a_1,$$

т. е. снова

$$a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_2,$$

что, разумеется, невозможно.

Для того чтобы в конфигурации шести квадратов не образовалось пустого угла, незаполнимого одним квадратом, верхний край квадрата K_6 должен служить продолжением верхнего края квадрата K_2. По этой же причине правая сторона квадрата K_6 должна лежать правее правой стороны

[1]) Здесь, как и ранее, мы считаем, что квадраты $K_1, \ldots, K_5$ расположены так, как это изображено на рис. 3, *а*, т. е. что стороны складываемых квадратов горизонтальны и вертикальны; это позволяет употреблять слова «верх», «низ», «справа», «слева».

квадрата K_5, т. е. должно иметь место расположение квадратов, изображенное на рис. 8. При этом мы имеем

$$a_2=a_3+a_1,\quad a_3=a_4+a_1,\quad a_4=a_5+a_1$$

и

$$a_5+a_8=a_2+a_1,\quad a_8=a_5+a_7,\quad a_7=a_4+a_5.$$

Отсюда, с одной стороны,

$$a_2=a_3+a_1=a_4+2a_1=a_5+3a_1 \quad \text{и} \quad a_2=a_5+a_8-a_1,$$

т. е.

$$a_8=4a_1,$$

и, с другой стороны,

$$a_8=a_5+a_7=2a_5+a_4=3a_5+a_1,$$

т. е.

$$3a_5=a_8-a_1=3a_1,\quad a_5=a_1.$$

Но это противоречит тому, что все квадраты должны быть попарно различными. Таким образом, и *из семи попарно различных квадратов нельзя сложить прямоугольник.*

Перейдем теперь к случаю восьми квадратов.

Рассмотрим основную конфигурацию из пяти квадратов. В этой конфигурации не должно быть больше двух незаполненных углов (в противном случае эти углы нельзя было бы заполнить тремя квадратами). Рассмотрим сначала случай, когда имеется один незаполненный угол. Тогда, как показано при рассмотрении случая семи квадратов, квадрат K_2 должен выступать над квадратом K_5. Квадрат K_6 должен образовывать пустой угол с квадратом K_5, так как никакие два квадрата по условию не равны между собой. Поэтому

$$a_5+a_6=a_1+a_2,$$

ибо в противном случае в конфигурации шести квадратов оставались бы два пустых угла, которые нельзя было бы заполнить двумя дополнительными квадратами. Предположим теперь, что $a_6<a_5$ (рис. 9, a); тогда квадрат K_7, заполняющий угол между квадратами K_6 и K_5, сам должен образовывать с квадратом K_6 пустой угол, причем должно быть $a_7>a_6$, так как иначе этот угол нельзя было бы заполнить одним квадратом. В таком случае квадрат K_8 прилегает одной стороной к квадратам K_2 и K_8, а другой стороной — к квадрату K_7. Следовательно (см рис. 9, a),

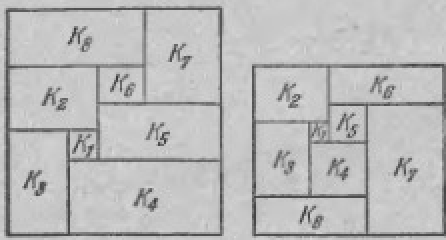
$$a_7 < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_8,$$

а, с другой стороны,

$$a_7 > a_8,$$

что, разумеется, невозможно.

Остается исследовать случай $a_6 > a_5$ (рис. 9, $б$). Здесь правая сторона квадрата K_7, заполняющего угол, образованный квадратами K_6 и K_5, должна лежать на одной прямой с правой стороной квадрата K_6, так как иначе квадраты



а) б)

Рис. 9.

K_6 и K_7 образовали бы пустой угол, который нельзя заполнить одним квадратом. В то же время должно быть $a_7 > a_5 + a_4$, так как в противном случае также образуется незаполнимый пустой угол. Таким образом, квадрат K_8 должен примыкать к конфигурации семи квадратов так, как показано на рис. 9, $б$.

Но в таком случае мы будем иметь

$$a_8 < a_7 < a_6 < a_2 = a_3 + a_1,$$

а, с другой стороны,

$$a_8 = a_3 + a_4,$$

что невозможно, так как $a_1 < a_4$.

Рассмотрим теперь случай, когда в конфигурации пяти квадратов имеются д в а пустых угла. Условимся два пустых угла называть *смежными*, если они прилегают к одному квадрату; в противном случае назовем их *несмежными*. Предположим сначала, что в конфигурации пяти квадратов образуются два н е с м е ж н ы х пустых угла. Случаи, изображенные на рис. 10, *а*, *б*, отпадают сразу; действительно, здесь для заполнения каждого из пустых углов надо не меньше двух квадратов и, следовательно, в общей

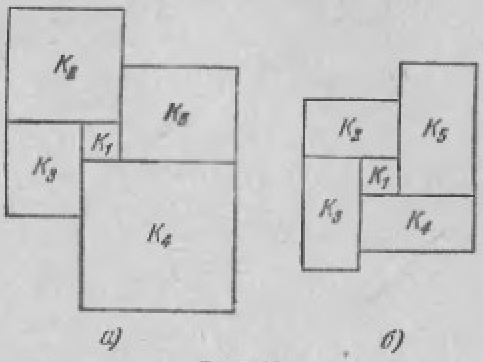


Рис. 10.

сложности для получения прямоугольника потребуется не менее девяти квадратов [1]). Рассмотрим теперь случай,

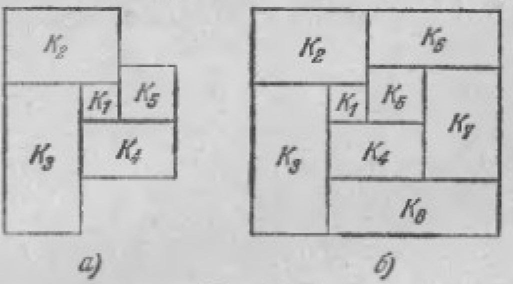


Рис. 11.

изображенный на рис. 11,*а*. Рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся, что квадраты K_6, K_7 и K_8 должны быть расположены так, как это изображено на рис. 11, *б*. Но в этом случае

$$a_2 = a_3 + a_1, \quad a_3 = a_4 + a_8 + a_1, \quad a_4 = a_5 + a_1,$$
$$a_8 = a_4 + a_7, \quad a_7 = a_4 + a_5, \quad a_6 = a_5 + a_7.$$

[1]) Случай, изображенный на рис. 10, *б*, невозможен еще и потому, что здесь

$$a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_2$$

(ср. выше, стр. 14—15).

Отсюда получаем

$$a_2 + a_1 = a_3 + 2a_1 = a_4 + a_8 + 3a_1 = a_5 + (a_4 + a_7) + 4a_1 =$$
$$= a_4 + (a_5 + a_7) + 4a_1 = a_5 + a_6 + 5a_1 > a_5 + a_8,$$

в то время как из рис. 11, *б* следует, что

$$a_2 + a_1 = a_5 + a_8.$$

Этим закончено рассмотрение конфигурации с двумя несмежными пустыми углами в основной конфигурации пяти квадратов.

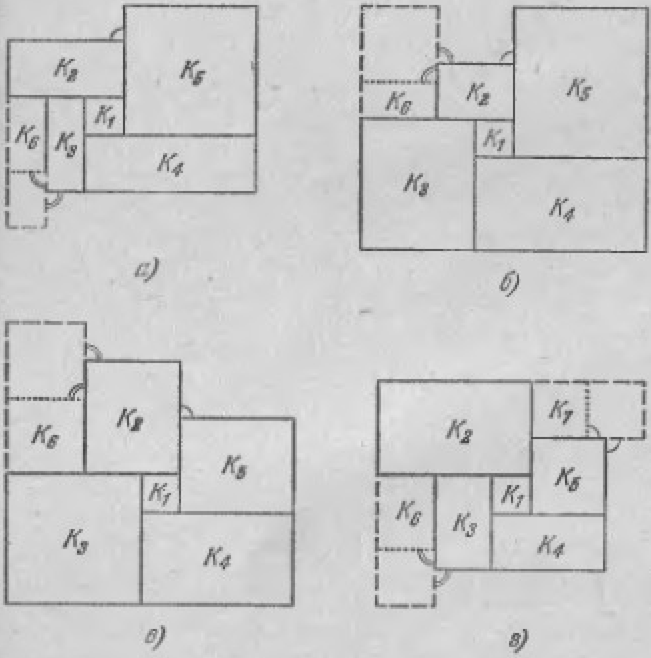


Рис. 12.

Рассмотрим теперь последовательно все возможные случаи, когда два пустых угла в основной конфигурации пяти квадратов (рис. 3, *а*) являются с м е ж н ы м и. Все эти случаи изображены на рис. 12.

1°. *Случай рис.* 12, *а*. Заполнив угол, образованный квадратами K_2 и K_3, квадратом K_6, получаем два пустых угла, один из которых образован квадратами K_6 и K_3, а другой — квадратами K_2 и K_5. Эти углы не могут быть заполнены двумя квадратами, так как угол между квадратами K_2 и K_5 нельзя заполнить одним квадратом (если $a_6>a_3$, то угол, образованный квадратами K_3 и K_6, может оказаться заполнимым одним квадратом).

2°. *Случай рис.* 12, *б*. Пусть пустой угол, образованный квадратами K_2 и K_3, заполнен квадратом K_6. Если $a_6<a_2$, то в конфигурации шести квадратов остаются два «пустых» угла, которые нельзя заполнить двумя квадратами. Если же $a_6>a_2$, то образуется «пустой колодец», который тоже, очевидно, нельзя заполнить двумя квадратами, не равными между собой и отличными от квадрата K_2.

3°. *Случай рис.* 12, *в*. Заполняя квадратом K_6 пустой угол, образованный квадратами K_2 и K_3, мы получаем пустой угол, образованный квадратами K_2 и K_6; кроме того, имеется еще один пустой угол, образованный квадратами K_2 и K_5. Эти два угла никак нельзя заполнить двумя квадратами.

4°. *Случай рис.* 12, *г*. Вставим в пустые углы, образованные квадратами K_2 и K_3, соответственно K_2 и K_5, квадраты K_6 и K_7; при этом образуются еще два пустых угла.

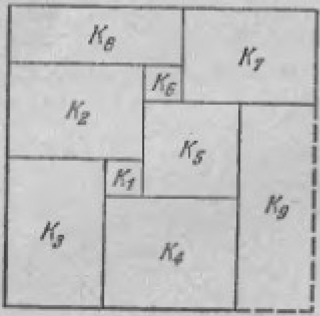


Рис. 13.

Так как мы рассмотрели все возможные случаи, то этим полностью доказано, что *из восьми попарно неравных квадратов сложить прямоугольник нельзя.*

Наконец, обратимся к случаю девяти квадратов. Конфигурация из восьми квадратов, изображенная на рис. 9, *а*, оказалась невозможной, так как неравенство $a_7<a_5$ противоречит неравенству $a_8<a_7$. Следовательно, если бы у нас было $a_7>a_5$ и мы приложили бы квадрат K_7 так, как изображено на рис. 13, то никакого противоречия не получилось бы.

Покажем теперь, что образовавшийся в конфигурации восьми квадратов пустой угол иногда можно заполнить одним квадратом K_9.

Действительно, из рис. 13 следует

$$a_4 = a_1 + a_5,\quad a_2 = a_1 + a_3,\quad a_5 + a_9 = a_6 + a_7,\quad a_8 = a_2 + a_6,$$
$$a_3 = a_4 + a_1,\quad a_1 + a_2 = a_5 + a_6,\quad a_7 = a_6 + a_8,\quad a_9 = a_4 + a_5.$$

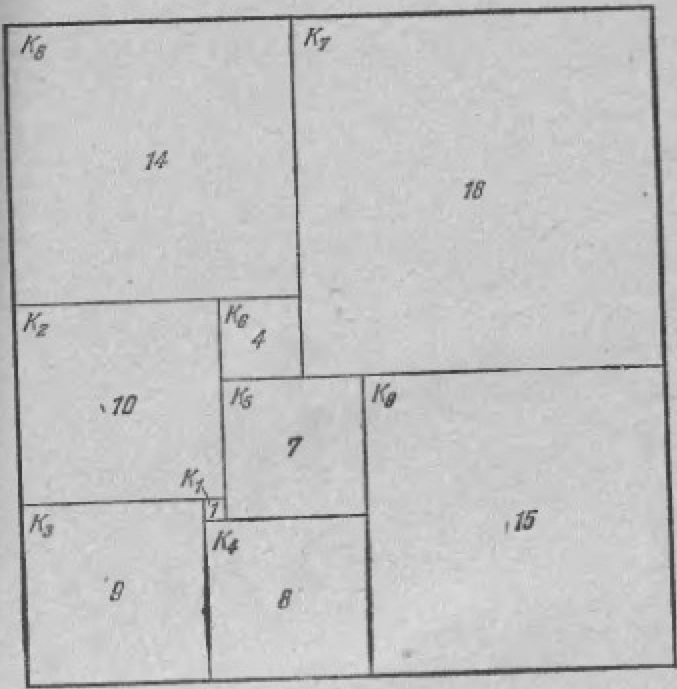


Рис. 14.

Отсюда получаем

$$a_2 = a_1 + a_3 = 2a_1 + a_4 = 3a_1 + a_5 \quad \text{и} \quad a_2 = a_5 + a_6 - a_1;$$

таким образом,

$$3a_1 + a_5 = a_5 + a_6 - a_1,\quad a_6 = 4a_1.$$

Затем имеем

$$a_5 = a_2 + a_1 - a_6 = a_2 - 3a_1,$$
$$a_5 = a_6 + a_7 - a_9 = 2a_6 + a_8 - (a_4 + a_5) = \\ = 3a_6 + a_2 - (2a_5 + a_1),$$

$$3a_5 = 3a_6 + a_2 - a_1 = 11a_1 + a_2;$$

поэтому

$$3a_2 - 9a_1 = 11a_1 + a_2, \quad 2a_2 = 20a_1, \quad \text{т. е.} \quad a_2 = 10a_1.$$

Далее находим

$$a_3 = a_2 - a_1 = 9a_1, \qquad a_4 = a_3 - a_1 = 8a_1,$$
$$a_5 = a_4 - a_1 = 7a_1, \qquad a_8 = a_2 + a_6 = 14a_1,$$
$$a_9 = a_4 + a_5 = 15a_1, \quad a_7 = a_6 + a_8 = 18a_1.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$a_2 = 10a_1, \quad a_3 = 9a_1, \quad a_4 = 8a_1, \quad a_5 = 7a_1,$$
$$a_6 = 4a_1, \quad a_7 = 18a_1, \quad a_8 = 14a_1, \quad a_9 = 15a_1.$$

Совокупность квадратов с такими длинами сторон удовлетворяет всем условиям задачи (рис. 14); *длины сторон разбиваемого прямоугольника* здесь равны $32a_1$ и $33a_1$, т. е. *относятся как* $32 : 33$.

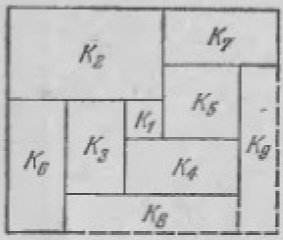


Рис. 15.

Совсем иное разбиение прямоугольника на девять попарно неравных квадратов можно получить, исходя из рис. 12, *г*. На этом рисунке видны два пустых угла, образованных квадратами K_6 и K_3 (мы считаем, что $a_6 > a_3$) и квадратами K_7 и K_5 (где $a_7 > a_5$). Заполним эти два угла квадратами K_8 и K_9 как указано на рис. 15; при этом очевидно,

$$a_8 = a_3 + a_4, \quad a_4 = a_1 + a_5, \quad a_2 = a_6 + a_3 + a_1, \quad a_7 = a_5 + a_9,$$
$$a_6 = a_8 + a_3, \quad a_3 = a_4 + a_1, \quad a_1 + a_2 = a_5 + a_7,$$
$$a_9 = a_8 + a_4 + a_5.$$

Из этой системы уравнений последовательно получаем

$$a_3 = a_4 + a_1, \; a_8 = a_3 + a_4 = 2a_4 + a_1, \; a_6 = a_8 + a_3 = 3a_4 + 2a_1,$$
$$a_5 = a_4 - a_1, \quad a_2 = a_6 + a_3 + a_1 = 4a_4 + 4a_1,$$
$$a_7 = a_1 + a_2 - a_5 = 3a_4 + 6a_1,$$
$$a_9 = a_7 - a_5 = 2a_4 + 7a_1, \quad a_9 = a_8 + a_4 + a_5 = 4a_4.$$

Отсюда вытекает, что

$$2a_4 + 7a_1 = 4a_4, \quad \text{т. е.} \quad a_4 = \frac{7}{2}a_1,$$

и, значит,

$$a_3 = \frac{9}{2}a_1, \quad a_8 = 8a_1, \quad a_6 = \frac{25}{2}a_1,$$

$$a_5 = \frac{5}{2}a_1, \quad a_2 = 18a_1, \quad a_7 = \frac{33}{2}a_1, \quad a_9 = 14a_1.$$

Таким образом, имеем

$$a_2 = 18a_1, \quad a_3 = \frac{9}{2}a_1, \quad a_4 = \frac{7}{2}a_1, \quad a_5 = \frac{5}{2}a_1,$$

$$a_6 = \frac{25}{2}a_1, \quad a_7 = \frac{33}{2}a_1, \quad a_8 = 8a_1, \quad a_9 = 14a_1.$$

Из совокупности девяти квадратов с такими длинами

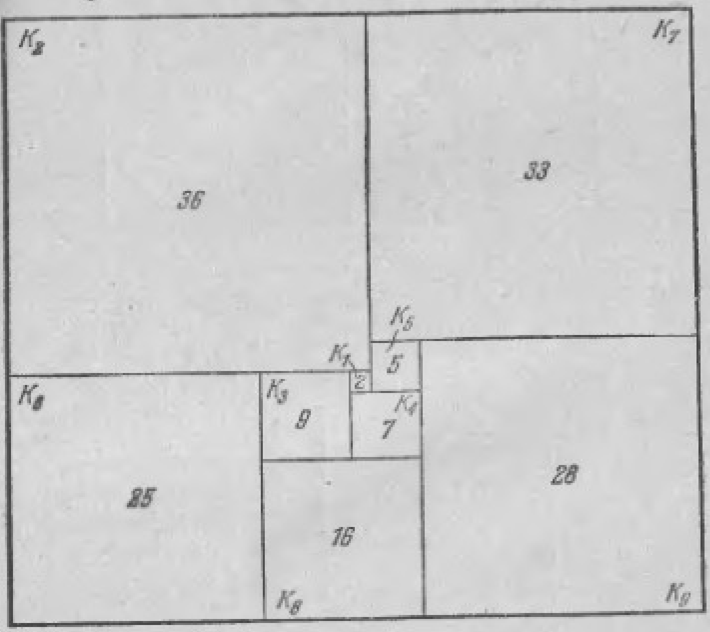


Рис. 16.

сторон можно сложить прямоугольник со сторонами

$$\frac{61}{2}a_1 \text{ и } \frac{69}{2}a_1,$$

т. е. прямоугольник, *стороны которого относятся как* 61 : 69 (рис. 16).

Внимательный анализ всех случаев расположения квадратов, изображенных на рис. 9—12 (или иные соображения, о которых мы скажем в § 2), показывает, что *невозможны никакие разбиения прямоугольника на девять попарно различных квадратов, отличные от изображенных на рис.* 14 *и* 16.

Задача 1. Рассмотрев все возможные случаи расположения девяти квадратов, докажите сформулированное выше утверждение.

Теперь мы без труда можем ответить на вопрос о том, *из какого числа n попарно различных квадратов можно составить прямоугольник.* Мы уже видели, что при $n<9$ это

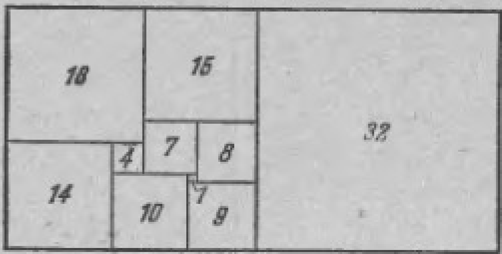


Рис. 17.

невозможно, а при $n=9$ возможно (из девяти квадратов прямоугольник можно составить даже двумя способами). Но если мы к стороне прямоугольника, образованного девятью попарно неравными квадратами, приложим квадрат, сторона которого равна этой стороне прямоугольника, то получим прямоугольник, образованный десятью попарно различными квадратами (рис. 17). Аналогично, приложив к полученному прямоугольнику квадрат со стороной, равной большей стороне этого прямоугольника, мы получим прямоугольник, который можно разрезать на одиннадцать попарно неравных квадратов. Поступая и дальше таким же образом, мы последовательно получим прямоугольники, сложенные из 12, 13, 14, ... попарно неравных квадратов (см. рис. 18, на котором заштрихован прямоугольник,

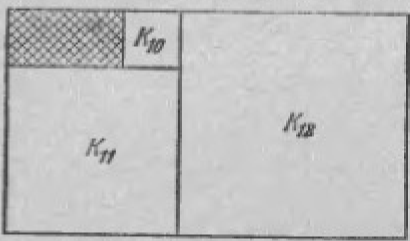


Рис. 18.

сложенный из девяти попарно различных квадратов). Таким образом, *прямоугольник можно составить из любого целого числа $n \geqslant 9$ попарно неравных квадратов.*

Более того, для любого $n \geqslant 9$ прямоугольник можно составить из n попарно неравных квадратов рядом способов.

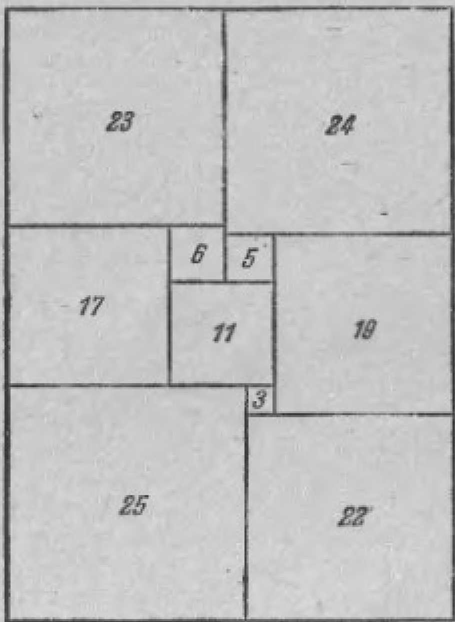


Рис. 19

Так, мы знаем, что из 9 попарно различных квадратов прямоугольник можно составить двумя существенно различными способами. Поэтому из 10 попарно неравных квадратов прямоугольник можно составить, по крайней мере, четырьмя способами: к прямоугольнику со сторонами 32 и 33 (рис. 14) можно приложить квадрат со стороной 32 (рис. 17) или квадрат со стороной 33; к прямоугольнику со сторонами 61 и 69 (рис. 16) можно приложить квадрат со стороной 61 или квадрат со стороной 69. Но этими четырьмя вариантами возможности сложить прямоугольник из 10 попарно различных квадратов далеко не исчерпываются: так, на рис. 19 изображено разбиение прямоугольника со сторонами 47 и 65 на 10 попарно различных квадратов, как будто впервые указанное Яремкевичем [5]. Исходя из двух установленных выше возможностей составления прямоугольника из 9 попарно различных квадратов, мы находим четыре возможности составления прямоугольника из 10 попарно различных квадратов; четыре возможности составления прямоугольника из 11 попарно различных квадратов; столько же возможностей составления прямоугольника из 12 попарно неравных квадратов. Точно так же, исходя из изображенного на рис. 19 разбиения прямоугольника на 10 попарно различных квадратов, мы можем указать два варианта разбиения прямоугольника на 11 неповторяющихся квадратов (они получаются приложением к прямоугольнику, изображенному на рис. 19, квадрата со стороной 47 или квадрата со стороной 65) и два новых варианта разбиения прямоугольника на 12 квадратов. Таким образом, мы имеем 6(=4+2) вариантов разбиения прямоугольника на 12 попарно неравных квадратов; однако эти варианты далеко не исчерпывают все возможности: так, например, на рис. 20 изображено отличное от всех описанных выше разбиение прямоугольника (со сторонами 256 и 377) на 12 попарно различных квадратов (это разбиение впервые было указано Р. Шпрагом [9]).

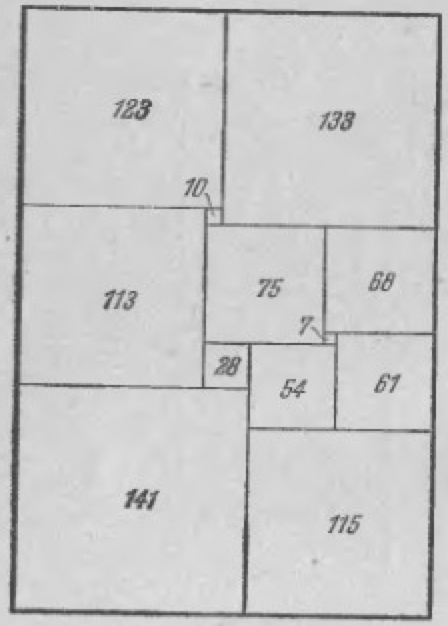


Рис. 20.

Вообще число способов, которыми можно составить прямоугольник из n попарно различных квадратов, довольно быстро растет с ростом n: всего существует два различных разбиения прямоугольника на девять попарно неравных квадратов (рис. 14 и рис. 16); 10 различных разбиений прямоугольника на д е с я т ь попарно неравных квадратов; 38 различных разбиений прямоугольника на о д и н н а д ц а т ь попарно неравных квадратов; 127 различных разбиений прямоугольника на д в е н а д ц а т ь попарно неравных квадратов и 408 различных разбиений прямоугольника на т р и н а д ц а т ь попарно неравных квадратов; все эти разбиения были перечислены К. Я. Б а у к а м п о м [15], [16]. При этом среди

$$2+10+38+127+408=585$$

прямоугольников, которые можно разрезать на $n\leqslant 13$ попарно различных квадратов, встречаются и одинаковые.

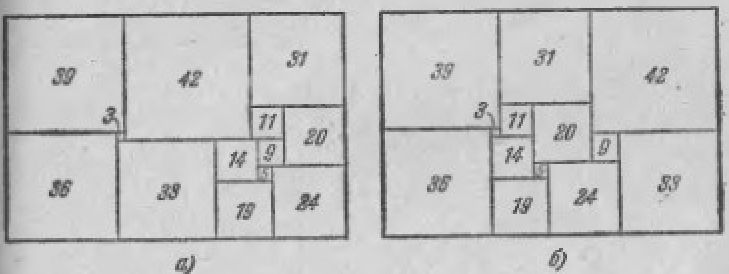


Рис. 21.

Так, на рис. 21, *а*, *б* изображены два различных разбиения прямоугольника со сторонами 75 и 112 на тринадцать квадратов, причем в совокупности своей эти квадраты о д н и и т е ж е как при одном, так и при другом разбиении: их стороны равны соответственно 3, 5, 9, 11, 14, 19, 20, 24, 31, 33, 36, 39, 42. Напротив, на рис. 22, *а*, *б* изображены два разбиения прямоугольника со сторонами 422 и 593 на тринадцать квадратов, причем обе совокупности квадратов совершенно различны (т. е. *ни один из квадратов, участвующих в первом разбиении прямоугольника, не входит во второе разбиение*, и наоборот): в первое разбиение входят квадраты со сторонами

2, 22, 37, 39, 41, 43, 80, 164, 178, 200, 207, 215, 222, (I)

а во второе — квадраты со сторонами

18, 38, 49, 67, 72, 85, 103, 116, 154, 175, 192, 230, 247. (II)

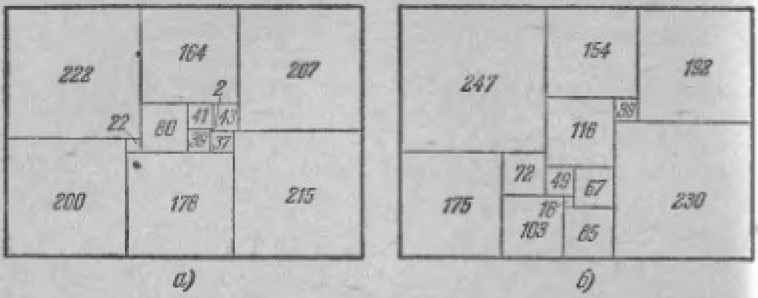

222
164
207
2
22
80
41
43
39
37
200
178
215
а)
247
154
192
36
116
72
49
67
175
18
103
85
230
б)

Рис. 22.

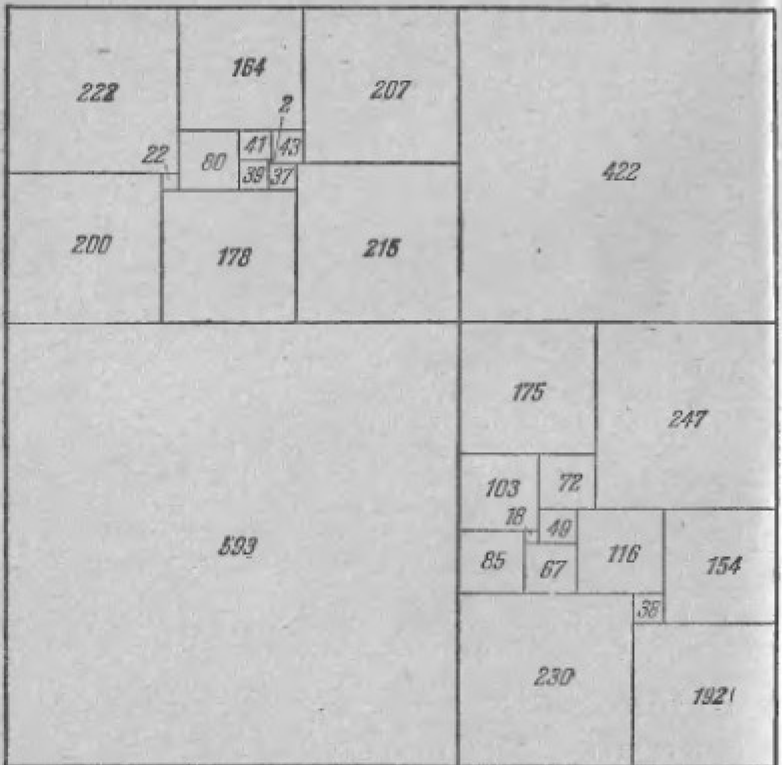

222
164
207
2
22
80
41
43
39
37
422
200
178
215
593
175
247
103
72
18
49
85
67
116
154
36
230
192

Рис. 23.

Среди 585 перечисленных Баукампом прямоугольников, которые можно разрезать на попарно различные квадраты, не было ни одного квадрата. Таким образом, было доказано, что *никакой квадрат нельзя разрезать на 13 или менее попарно различных квадратов*. Отсюда, однако, вовсе еще не следовало, что квадрат нельзя разрезать и на большее чем 13 число различных квадратов; напротив, исходя из указанных в работе [15] разбиений прямоугольников на квадраты, оказалось нетрудно построить даже

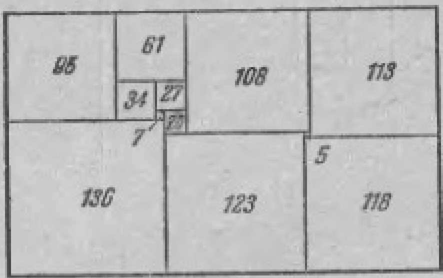


Рис. 24а.

несколько разных примеров разбиения квадрата на попарно различные квадраты. Так, например, дополнив изображенные на рис. 22, *а,б* прямоугольники двумя квадратами со сторонами 422 и 593 до одного большого квадрата со стороной 422+593=1015, как это указано на рис. 23, мы придем к найденному впервые А. Г. Стоном [11] *разбиению квадрата со стороной* 1015 *на* 28 *попарно различных квадратов со сторонами* [1])

2, 18, 22, 37, 38, 39, 41, 43, 49, 67, 72, 80, 85, 103, 116, 154, 164, 175, 178, 192, 200, 207, 215, 222, 230, 247, 422, 593.

Исходя из изображенных на рис. 24а и 24б разбиений прямоугольника со сторонами 231 и 377 на двенадцать попарно различных квадратов и прямоугольника со сторонами 307 и 608 на тринадцать попарно различных квадратов и учитывая, что 608—377=231, можно построить *разбиение*

---

[1]) Любопытно отметить, что одновременно со Стоном его коллега по Кембриджскому университету У. Т. Татт указал совсем другое разбиение квадрата со стороной 1015 на 28 попарно неравных квадратов с целочисленными длинами сторон (см. [11]).

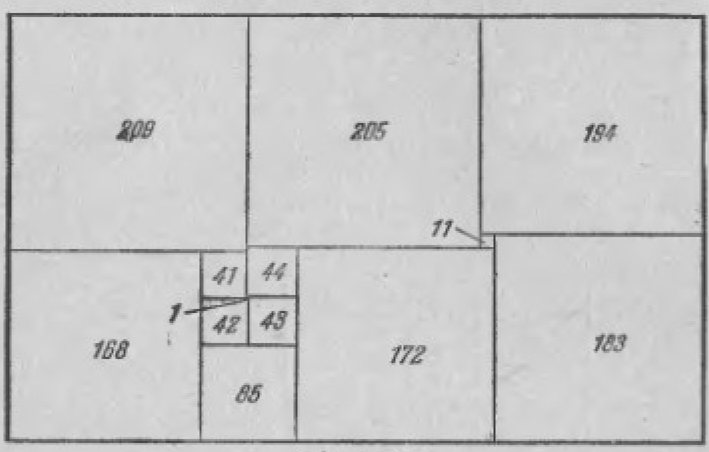


Рис. 24б.

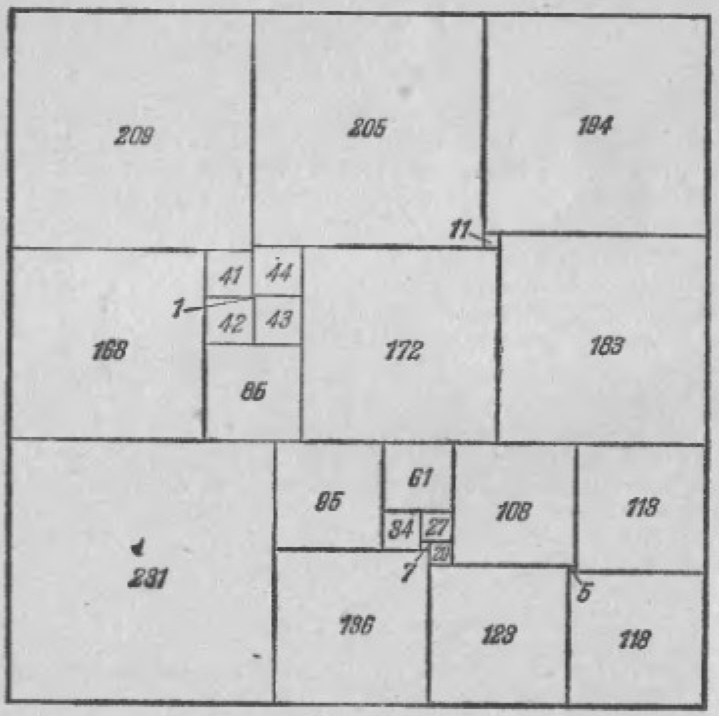


Рис. 25.

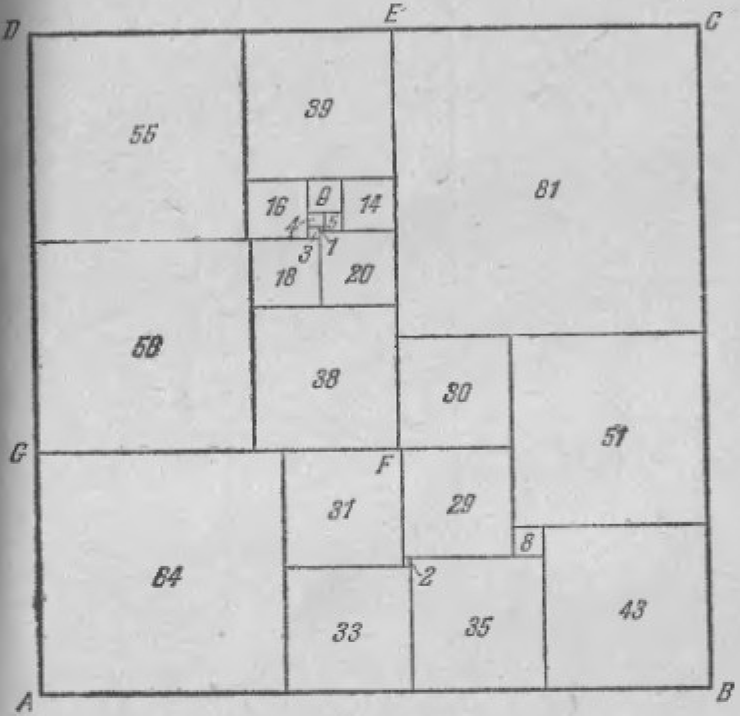
квадрата со стороной 608 (рис. 25) *на*

$$12+13+1=26$$

попарно различных квадратов со сторонами

1, 5, 7, 11, 20, 27, 34, 41, 42, 43, 44, 61, 85, 95, 108, 113, 118, 123, 136, 168, 172, 183, 194, 205, 209, 231.

Это разложение впервые было указано Р. Л. Бруксом, К. А. Б. Смитом, А. Г. Стоном и У. Т. Татти [13]; оно долго считалось «самым лучшим» из всех возмож-



ных разбиений квадрата на попарно различные квадраты. Наконец, на рис. 26 изображено *разбиение квадрата со стороной* 175 *на* 24 *неповторяющихся квадрата со сторонами*

1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81, указанное Ф. Г. А. Вилькоксом [18], [21]; это есть наиболее «экономное» (и по числу использованных квадратов, и по их размерам) из всех известных до сих пор разбиений квадрата на неповторяющиеся квадраты.

Возможность разбиения квадрата на попарно различные квадраты была впервые установлена Р. Шпрагом [9] в 1939 г.; при этом построенный им пример близок к разбиению квадрата на 28 различных квадратов, изображенному на рис. 23. А именно, прежде всего Шпраг, исходя из изображенных на рис. 14, 19 и 20 вариантов разбиения прямоугольника на 9, 10 и 12 попарно различных квадратов, установил, что

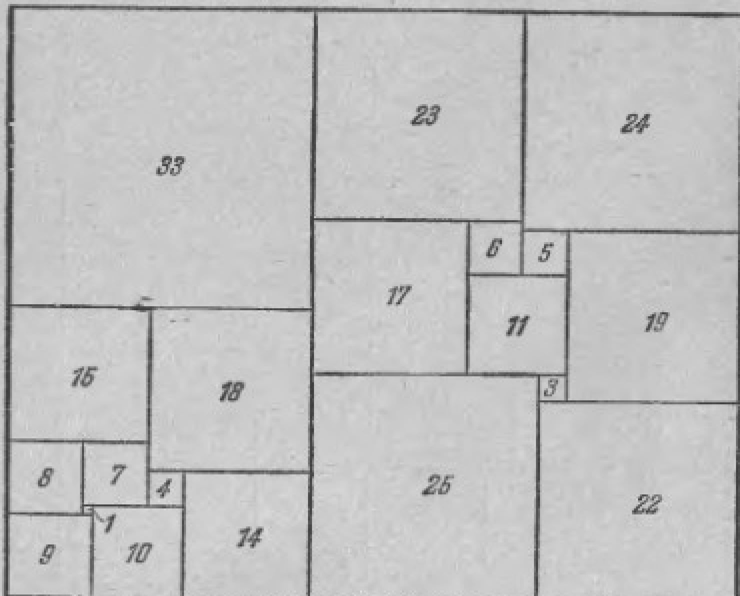


Рис. 27

прямоугольник с отношением сторон 13:16 можно двумя существенно разными способами разбить на попарно неравные квадраты, причем ни один из квадратов, фигурирующих в первом разбиении этого прямоугольника, не равен ни одному из квадратов, участвующих во втором разбиении. В самом деле, стороны прямоугольника P_1, изображенного на рис. 14, равны 32 и 33; приложив к этому прямоугольнику квадрат со стороной 33, мы получим прямоугольник $\overline{P}_1$ со сторонами

$$33 \text{ и } 32+33=65,$$

который составлен из 10 попарно неравных квадратов. Далее, стороны прямоугольника P_2, изображенного на рис. 19, равны 47 и 65; приложив друг к другу прямоугольники P_1 и P_2 равными сторонами, мы получим прямоугольник P со сторонами

$$65=13\cdot 5 \text{ и } 33+47=80=16\cdot 5,$$

который, таким образом, составляется из 20 попарно различных квадратов (рис. 27).

Перейдем теперь ко второму способу разбиения прямоугольника с отношением сторон 13: 16 на попарно неравные квадраты. Стороны прямоугольника Q_1, изображенного на рис. 20, равны

$$256=16\cdot 16 \text{ и } 377=13\cdot 29.$$

стороны прямоугольника P, изображенного на рис. 27, равны $13\cdot 5$ и

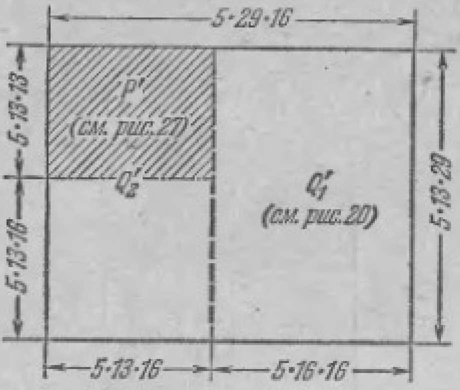


Рис. 28.

$16\cdot 5$. Приложив к прямоугольнику P квадрат со стороной $16\cdot 5$, мы придем к новому прямоугольнику Q_2 со сторонами

$$16\cdot 5 \text{ и } 16\cdot 5+13\cdot 5=29\cdot 5;$$

прямоугольник Q_2 составлен из 21 попарно неравных квадратов. Заменим прямоугольники Q_1 и Q_2 подобными им прямоугольниками Q_1' и Q_2' соответственно с коэффициентами подобия 5 и 13. Стороны прямоугольника Q_1' равны

$$5\cdot 16\cdot 16 \text{ и } 5\cdot 13\cdot 29,$$

а стороны прямоугольника Q_2' равны

$$13\cdot 16\cdot 5 \text{ и } 13\cdot 29\cdot 5.$$

Приложив эти два прямоугольника равными сторонами один к другому, мы получим прямоугольник Q, стороны которого равны

$$5\cdot 13\cdot 29 \text{ и } 5\cdot 16\cdot 16+5\cdot 13\cdot 16=5\cdot 16\cdot 29;$$

этот прямоугольник Q с тем же отношением сторон 13:16, что и прямоугольник P, составляется из 33 попарно неравных квадратов (см. рис. 28).

Заменим прямоугольник P подобным ему прямоугольником с коэффициентом подобия 29 (полученный прямоугольник также будем обозначать буквой P); тогда он станет равен прямоугольнику Q. Стороны квадратов, из которых состоит увеличенный прямоугольник P, равны

$$29,\ 3\cdot29,\ 4\cdot29,\ 5\cdot29,\ 6\cdot29,\ 7\cdot29,\ 8\cdot29,$$
$$9\cdot29,\ 10\cdot29,\ 11\cdot29,\ 14\cdot29,\ 15\cdot29,\ 17\cdot29,\ 18\cdot29,$$
$$19\cdot29,\ 22\cdot29,\ 23\cdot29,\ 24\cdot29,\ 25\cdot29,\ 33\cdot29,$$

а стороны квадратов, из которых состоит такой же прямоугольник Q, равны

$$13,\ 3\cdot13,\ 4\cdot13,\ 5\cdot13,\ 6\cdot13,\ 7\cdot13,\ 8\cdot13,$$
$$9\cdot13,\ 10\cdot13,\ 11\cdot13,\ 14\cdot13,\ 15\cdot13,\ 17\cdot13,\ 18\cdot13,$$
$$19\cdot13,\ 22\cdot13,\ 23\cdot13,\ 24\cdot13,\ 25\cdot13,\ 33\cdot13;$$
$$5\cdot13\cdot16$$

и

$$5\cdot7,\ 5\cdot10,\ 5\cdot28,\ 5\cdot54,\ 5\cdot61,\ 5\cdot68,$$
$$5\cdot75,\ 5\cdot113,\ 5\cdot115,\ 5\cdot123,\ 5\cdot133,\ 5\cdot141.$$

Никакие два из этих пятидесяти трех чисел не равны друг другу.

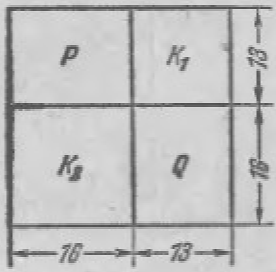


Рис. 29.

Разобьем теперь квадрат со стороной $13+16=29$ на два квадрата K_1 и K_2 и на два равных прямоугольника P и Q, подобно тому, как это было изображено на рис. 23; только стороны квадратов теперь будут равны 13 и 16 (см. рис. 29). Если, далее, разбить два прямоугольника P и Q на попарно неравные квадраты двумя способами, о которых говорилось выше, то весь квадрат со стороной 29 разобьется на

$$1+1+20+33=55$$

попарно неравных квадратов.

§ 2. ГРАФЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

В конце § 1 мы перечислили полученные математиками разных стран результаты, относящиеся к вопросу о разбиении квадрата или прямоугольника на попарно различные квадраты; в частности, мы указали, как можно разревать квадрат на 28 (рис. 23), на 26 (рис. 25), на 24 (рис. 26) и на 55 (см. текст, напечатанный в конце § 1 мелким шрифтом) неповторяющихся квадратов. Однако ясно, что с помощью тех кустарных приемов, которые помогли нам найти два прямоугольника, распадающиеся на 9 попарно неравных квадратов (см. рис. 14 и рис. 16 на стр. 21 и 23), все эти сложные разложения квадрата на сравнительно большое число меньших квадратов было бы отыскать очень трудно: здесь явно нужны иные, более совершенные методы.

Методы, с помощью которых было получено большинство из названных в § 1 результатов, связаны с использованием элементов теории графов [1]) и с привлечением соображений, применяемых при проектировании сложных электрических цепей. *Графом* на плоскости называется всякая система линий, например прямолинейных отрезков, соединяющих между собой точки некоторой заданной системы точек; эти точки называются *вершинами* графа, а соединяющие эти точки линии (отрезки) — *ребрами* графа. Части плоскости, ограниченные (вообще говоря, криволинейными) ломаными, образованными из ребер графа, подобные областям I или II на рис. 30, *а*, называются *гранями* [2]) графа. При этом если граф имеет B вершин, P ребер и Γ граней, то (целые положительные) *числа B, P и Γ связаны между собой соотношением*

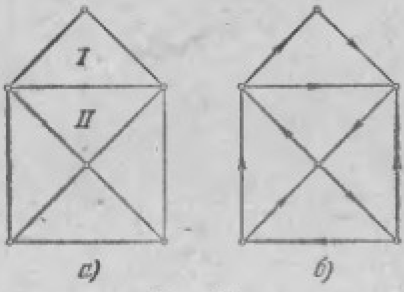


Рис. 30.

$$B - P + \Gamma = 1 \qquad (\text{Э})$$

(теорема Эйлера) [3]); так, например, для графа

---

[1]) См., например, О. Оре, Графы и их применение, «Мир», 1965.

[2]) Это название связано с аналогией между рассматриваемым здесь *плоским графом* и *пространственным графом*, образованным сетью ребер произвольного многогранника; вершинами пространственного графа являются вершины многогранника, а области, ограниченные замкнутой цепочкой ребер такого графа, лежащих в одной плоскости, являются гранями многогранника.

[3]) См., например, § 2 гл. VII названной выше книги О. Оре или текст, напечатанный ниже мелким шрифтом.

рис. 30, *а*

$$B=6,\ P=10,\ \Gamma=5 \text{ и } B-P+\Gamma=6-10+5=1.$$

Наконец, укажем еще, что граф, ребра которого снабжены стрелками, выделяющими некоторое направление обхода этих ребер (см. например, рис. 30, *б*), называется *направленным* (или *ориентированным*) графом.

Для того чтобы доказать соотношение (Э) (теорему Эйлера), заметим сначала, что для графа, состоящего из единственной вершины, из которой не исходит ни одно ребро, это соотношение, разумеется, выполняется: ведь для такого графа $B=1$, $P=0$ и $\Gamma=0$, так что здесь

$$B-P+\Gamma=1-0+0=1.$$

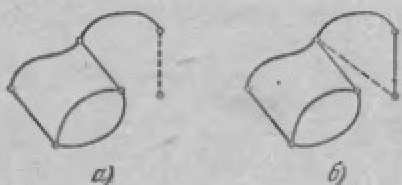


Рис. 31.

Далее будем «увеличивать» исходный граф, состоящий из единственной точки, присоединяя к нему последовательно все новые и новые ребра; если при этом вновь присоединенное ребро исходит из имевшейся ранее вершины и заканчивается в точке, ранее не входившей в число вершин (рис. 31, *а*), то эту точку мы тоже должны будем считать вершиной [1]). Поэтому присоединение такого ребра увеличивает на единицу числа P и B и не меняет чи́сла Γ (присоединение такого «свободного» ребра не меняет очевидно, чи́сла граней графа); таким образом, если число вершин, ребер и граней «увеличенного» графа обозначить соответственно через B', P' и Γ', то

$$B'=B+1,\qquad P'=P+1,\qquad \Gamma'=\Gamma,$$

где B, P и Γ — число вершин, ребер и граней исходного графа, и, значит,

$$B'-P'+\Gamma'=(B+1)-(P+1)+\Gamma=B-P+\Gamma,$$

т. е. выражение $B-P+\Gamma$ будет иметь для полученного таким путем графа то же значение, что и для исходного графа. Если же новое ребро соединяет две имевшиеся ранее вершины (рис. 31, *б*), то присоединение его к графу не меняет чи́сла B, но увеличивает на единицу чи́сла P и Γ (ибо присоединение такого ребра ведет к образованию «новой», ранее не имевшейся грани или к разбиению одной из граней «старого» графа на две «новые» грани). Поэтому если мы и тут обозначим число вершин, ребер и граней «нового» графа соответственно через B', P' и Γ', то будем иметь

$$B'=B,\qquad P'=P+1,\qquad \Gamma'=\Gamma+1,$$

где буквами B, P и Γ обозначены числа вершин, ребер и граней «старого» графа; таким образом, и в этом случае

$$B'-P'+\Gamma'=B-(P+1)+(\Gamma+1)=B-P+\Gamma,$$

[1]) Мы здесь ограничиваемся *связными* графами, т. е. такими, в которых любые две вершины соединены ломаной, состоящей из ребер графа; только для таких графов и верна теорема Эйлера.

т. е. операция прибавления к графу одного ребра, соединяющего две вершины графа (рис. 31, б) также не меняет выражения $B-P+\Gamma$.

Но ясно, что к любому (связному!) графу можно перейти от графа-точки, используя лишь описанные выше операции прибавления к графу одного нового ребра; поэтому для любого такого графа, как и для графа-точки,

$$B-P+\Gamma=1.$$

Пусть мы имеем теперь какое-то разбиение прямоугольника или квадрата на меньшие квадраты; для определенности мы будем говорить о изображенном на рис. 14 разбиении прямоугольника со сторонами 32 и 33 на девять неповторяющихся квадратов, хотя речь здесь может идти о

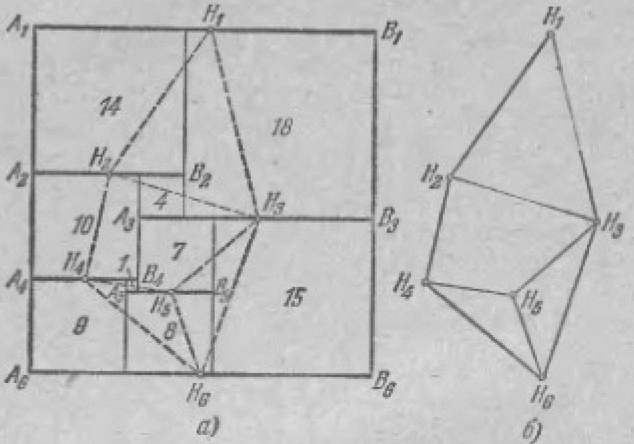


Рис. 32.

любом разбиении прямоугольника на квадраты, которые не обязаны даже быть попарно различными. Мы по-прежнему считаем, что стороны прямоугольника горизонтальны и вертикальны; тогда и стороны всех меньших квадратов будут горизонтальными и вертикальными. Рассмотрим все имеющиеся на нашем чертеже *горизонтальные отрезки*, т. е. отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 и A_6B_6 рис. 32,*а*. Каждому из этих отрезков сопоставим определенную точку (ее можно, хоть это и не обязательно, считать совпадающей с серединой соответствующего отрезка). Обозначим эти точки через H_1, H_2,... и примем их за вершины некоторого графа. Если двум точкам отвечают горизонтальные отрезки, содержащие стороны одного квадрата нашего разбиения, то мы соединим эти точки отрезком (или дугой какой-либо другой линии). Таким образом, мы получим *граф* (рис. 32,*б*), *отвечающий данному разбиению прямоугольника на квадраты*; р е б р а этого графа отвечают, очевидно, квадратам разбиения, а в е р ш и н ы — горизонтальным отрезкам, определяемым нашим разбиением.

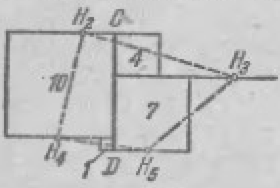


Рис. 33.

Для дальнейшего нам будет также полезно выяснить геометрический смысл г р а н е й полученного графа. Рассмотрим, например, грань $H_2H_3H_5H_4$. Этой грани отвечает последовательность четырех квадратов разбиения. Самой верхней и самой нижней вершинам H_2 и H_5 рассматриваемой грани отвечают горизонтальные прямые, вдоль которых сходятся соответственно квадраты со сторонами 10 и 4 (изображаемые на графе ребрами H_2H_4 и H_2H_3) и квадраты со сторонами 1 и 7 (изображаемые на графе ребрами H_4H_5 и H_3H_5); при этом квадрат со стороной 1 имеет общую горизонтальную сторону с квадратом со стороной 10, а квадрат со стороной 7 — с квадратом со стороной 4. Таким образом, мы приходим к конфигурации квадратов, изображенной на рис. 33, из которого видно, что *все рассматриваемые квадраты соприкасаются по вертикальному отрезку CD*.

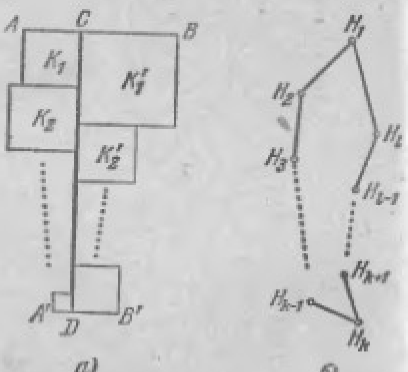


Рис. 34.

Обратимся теперь к общему случаю. Пусть $H_1\ H_2\ H_3 \ldots\ H_l$ — произвольная грань графа, отвечающего какому-то разбиению прямоугольника на квадраты, от которых мы пока не требуем, чтобы они были обязательно попарно различны (рис. 34, *а*, *б*). Предположим, что H_1 и H_k (где $k \leqslant l$) — самая верхняя и самая нижняя из вершин этой грани, т. е. что точки H_1 и H_k отвечают «крайним» (самому верхнему и самому нижнему) горизонтальным отрезкам из числа тех, которым на графе соответствуют вершины H_1, $H_2, \ldots$, H_l. Ребрам графа H_1H_2 и H_1H_l, исходящим из вершины H_1, отвечают два соседних квадрата, верхние основания которых принадлежат одной прямой AB (изображаемой на графе точкой H_1); эти два квадрата имеют общую вертикальную сторону CD (рис. 34, *а*). Если рассматриваемые квадраты K_1 и K_1' равны (рис. 35, *а*), то их нижние основания также принадлежат одной горизонтальной прямой $A'B'$; при этом ребра H_1H_2 и H_1H_l должны иметь д в е общие вершины, т. е. точки H_2 и H_l должны совпасть (рис. 35,*б*; обе эти точки отвечают прямой $A'B'$); следовательно, в этом случае рассматриваемая грань графа вырождается в «двуугольник» H_1H_2, который можно сопоставить вертикальному отрезку CD. Пусть теперь квадрат K_1', отвечающий ребру H_1H_l, больше квадрата K_1, отвечающего ребру H_1H_2 (рис. 34). В таком случае к квадрату K_1 снизу примыкает еще один квадрат K_2, также имеющий прямую CD своей вертикальной стороной; нетрудно понять, что на графе этот квадрат K_2 изображается ребром H_2H_3. Если квадраты K_2 и K_1' имеют общую горизонтальную сторону $A'B'$ (рис. 35,*в*), то концы ребер графа H_2H_3 и H_1H_l должны совпасть (рис. 35, *г*; в этом случае вершина $H_3 = H_l$ отвечает горизонтальному отрезку $A'B'$); таким образом, рассматриваемая здесь грань графа представляет собой треугольник $H_1H_2H_3$, три ребра которого отвечают трем квадратам, прилегающим к вертикальному отрезку CD. Если же, скажем, общая сумма сторон квадратов K_1 и K_2 больше стороны квадрата K_1' (рис. 34), то к квадрату K_1' снизу примыкает еще один квадрат K_2', также имеющий прямую CD своей стороной; этому квадрату на графе отвечает ребро H_lH_{l-1} (рис. 34,*б*). Продолжая этот анализ далее, мы убедимся, что во всех случаях ломаные $H_1H_2H_3\ldots$ и $H_1H_lH_{l-1}\ldots$ сомкнутся в точке H_k, отвечающей горизонтальному отрезку $A'B'$,

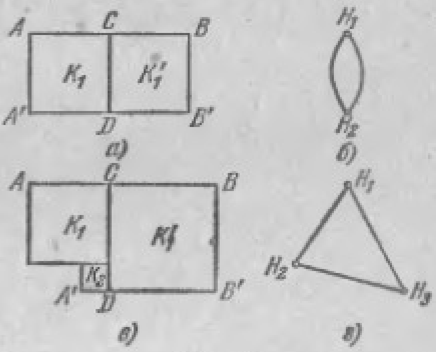


Рис. 35.

проходящему через нижний конец D вертикального отрезка CD, причем ломаным $H_1H_2H_3...H_k$ и $H_1H_lH_{l-1}...H_k$ будут отвечать последовательности квадратов, примыкающих слева и справа к вертикальному отрезку CD. Таким образом, мы заключаем, что каждая грань графа отвечает некоторому в е р т и к а л ь н о м у о т р е з к у из числа отрезков, производящих разбиение прямоугольника на квадраты. Ясно также, что, обратно, каждому (отличному от боковых сторон разбиваемого прямоугольника) вертикальному отрезку CD отвечает определенная грань графа, ограниченная двумя цепочками ребер, изображающими последовательности квадратов, примыкающих слева и справа к отрезку CD.

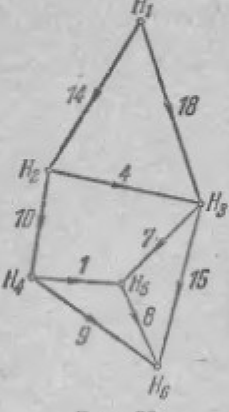


Рис. 36.

В дальнейшем мы всегда будем рисовать граф так, что из двух точек H и H', отвечающих горизонтальным отрезкам AB и $A'B'$, выше будет лежать точка, отвечающая тому из двух отрезков, который расположен выше другого; кроме того, на ребрах графа мы условимся ставить стрелки, указывающие направление с в е р х у в н и з. Таким образом, мы будем всегда считать рассматриваемый граф *направленным*. Далее, рядом с каждым ребром графа будем проставлять число, равное длине стороны квадрата, отвечающего этому ребру; это число мы условимся называть *весом* соответствующего ребра. Например, на рис. 36 вновь воспроизведен граф рис. 32,*б*, отвечающий разбиению прямоугольника на квадраты, изображенному на рис. 32,*а*, однако теперь уже — направленный граф, ребра которого снабжены весами.

Нетрудно установить соотношения, связывающие веса ребер всевозможных графов, отвечающих разбиениям прямоугольников на квадраты. Прежде всего ясно, что ребра, «входящие» в определенную вершину H, отвечают квадратам, примыкающим сверху к горизонтальному отрезку AB, изображением которого служит точка H; «исходящие» из точки H ребра отвечают квадратам, примыкающим к тому же отрезку AB снизу. [Так, на рис. 36 «входящие» в точку H_3 отрезки H_1H_3 и H_2H_3 отвечают квадратам со сторонами 18 и 4, примыкающим сверху к отрезку A_3B_3; «исходящие» же из этой точки отрезки H_3H_5 и H_3H_6 отвечают квадратам со сторонами 7 и 15, примыкающим к тому же отрезку снизу,— см. рис. 32,*а*.] Так как сумма длин сторон квадратов, примыкающих к какому-либо горизонтальному отрезку сверху, равна сумме длин сторон квадратов, примыкающих к тому же отрезку снизу, то *для каждой вершины графа сумма весов ребер графа, «входящих» в эту вершину, равна сумме весов ребер, «исходящих» из нее* (рис. 37,*а*).

Далее, если $H_{i_1}H_{i_2}H_{i_3}\ldots H_{i_l}$ — какая-то грань графа и H_{i_1}, H_{i_k} (где $k \leqslant l$) — самая верхняя и самая нижняя из ее вершин, то ломаным $H_{i_1}H_{i_2}\ldots H_{i_k}$ и $H_{i_1}H_{i_l}H_{i_{l-1}}\ldots H_{i_k}$

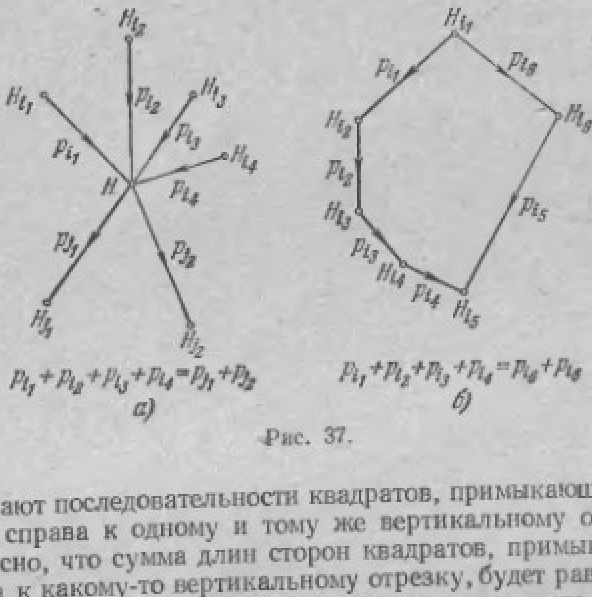


Рис. 37.

отвечают последовательности квадратов, примыкающих слева и справа к одному и тому же вертикальному отрезку. Но ясно, что сумма длин сторон квадратов, примыкающих слева к какому-то вертикальному отрезку, будет равна сумме длин сторон квадратов, примыкающих к этому же отрезку справа; поэтому для каждой грани графа *сумма весов всех ребер, составляющих ломаную $H_{i_1}H_{i_2}\ldots H_{i_k}$, равна сумме весов всех ребер, составляющих ломаную $H_{i_1}H_{i_l}H_{i_{l-1}}\ldots H_{i_k}$, где H_1, $H_2, \ldots, H_{i_k}, \ldots, H_{i_l}$— вершины данной грани, причем H_{i_1} и H_{i_k}— соответственно самая верхняя и самая нижняя вершины* (рис. 37,*б*). [Так, например, у графа, изображенного на рис. 36, самой верхней и самой нижней вершинами грани $H_2H_3H_5H_4$ являются точки H_2 и H_5; эти вершины соединяют ломаные $H_2H_3H_5$ и $H_2H_4H_5$, причем суммы весов отрезков, составляющих эти ломаные, суть 10+1 и 4+7.]

Условия, связывающие веса ребер графа, можно сформулировать еще и по-другому. Будем сопоставлять ребру $H'H$, проходимому в направлении, противоположном указанному стрелкой (т. е. в направлении от H' к H, где точка H' лежит н и ж е точки H), о т р и ц а т е л ь н ы й вес $-p$, равный взятому со знаком минус весу того же ребра, проходимого в «естественном» направлении HH'. Тогда выведенным выше условиям можно будет придать следующий вид: *для каждой вершины H сумма весов всех исходящих из этой вершины ребер графа $HH_{i_1}, HH_{i_2}, \ldots, HH_{i_k}$* (проходимых в направлении от H к H_{i_1}, от H к H_{i_2} и т. д.) *равна нулю; для каждой грани $H_{i_1}H_{i_2}\ldots H_{i_l}$ сумма весов всех ограничивающих эту грань ребер $H_{i_1}H_{i_2}, H_{i_2}H_{i_3}, \ldots, H_{i_{l-1}}H_{i_l}, H_{i_l}H_{i_1}$* (проходимых в направлении от H_{i_1} к H_{i_2}, от H_{i_2} к H_{i_3} и т. д.) *равна нулю.*

Заметим теперь, что указанные правила очень близки к так называемым з а к о н а м К и р х г о ф а, позволяющим рассчитывать силы токов, протекающих по тем или

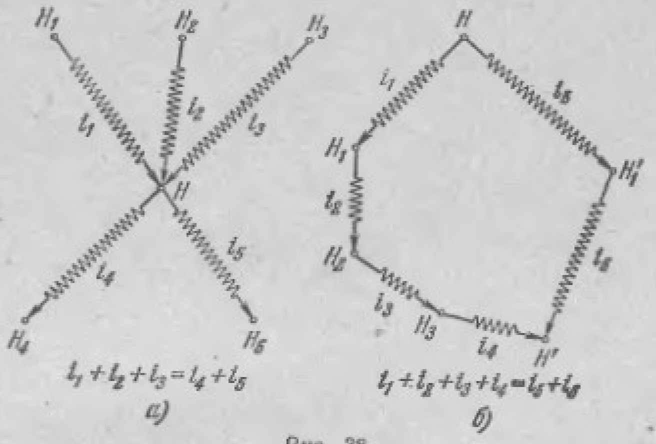


Рис. 38.

иным участкам разветвленной электрической цепи. В случае отсутствия в рассматриваемом участке цепи дополнительных источников тока (источник тока расположен где-то вне рассматриваемого участка) *сумма токов, выходящих из какой-либо вершины H разветвленной цепи, равна сумме токов, входящих в эту вершину* (рис. 38,*а*). С другой стороны, если сопротивления всех отдельных проводников, составляющих нашу сложную цепь, одинаковы, то для любых двух путей $HH_1H_2\ldots H_iH'$ и $HH'_1H'_2\ldots H'_jH'$, соединяющих какие-либо две вершины H и H' сети, *сумма токов, протекающих по проводникам $HH_1, H_1H_2, \ldots, H_{i-1}H_i, H_iH'$,* *равна сумме токов, протекающих по проводникам* HH_1', $H_1'H_2', \dots, H_{j-1}'H_j', H_j'H'$ (рис. 38, *б*; если сопротивления проводников равны 1, то в обоих случаях сумма сил токов равна разности электрических потенциалов в точках H и H').

Ясно, что сформулированные таким образом законы Кирхгофа в точности совпадают с правилами, связывающими веса ребер графа, отвечающего разбиению прямоугольника (ср. рис. 37 и 38). А так как правила Кирхгофа суть единственные соотношения, связывающие силы тока в отдельных участках разветвленной цепи, то *каждому разбиению прямоугольника на* (возможно даже и не попарно различные!) *квадраты отвечает определенная электрическая цепь*. Так, например, на рис. 39 изображена электрическая цепь, отвечающая разбиению прямоугольника на 9 квадратов, воспроизведенному на рис. 14, или на рис. 32, *а* (ср. с графом, изображенным на рис. 36). На рис. 40 изображены разбиение прямоугольника на 10 квадратов (см. также рис. 19) и электрическая цепь, соответствующая этому разбиению. Аналогичные примеры приведены на рис. 41 и 42, где квадраты разбиения не все различны между собой. Эта тесная связь между задачей о разбиении прямоугольника на квадраты и электрическими цепями позволяет использовать для поисков новых вариантов разбиений прямоугольников хорошо разработанные методы расчета сложных электрических цепей.

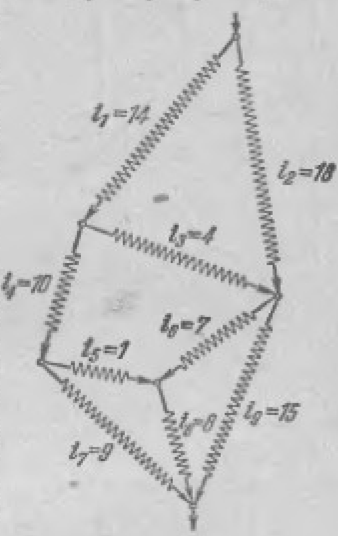
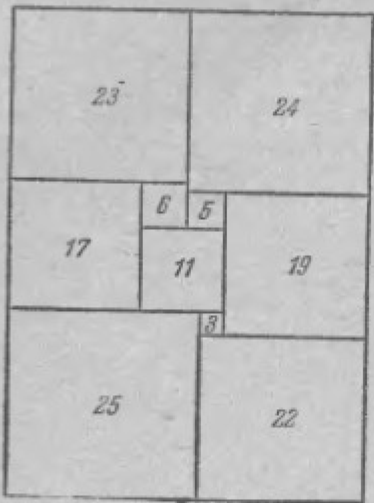
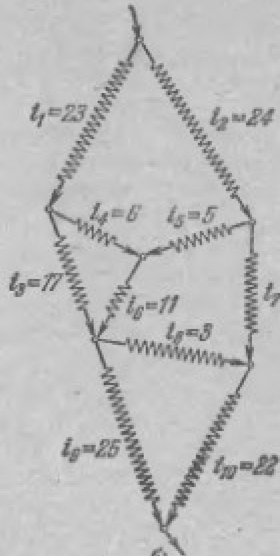


Рис. 39.

Электрическую цепь, отвечающую данному разбиению прямоугольника на квадраты, можно описать следующим образом. Представим себе проводящую электрический ток прямоугольную плиту, разбитую определенным образом на квадраты. С горизонтальными основаниями плиты совместим электроды цепи таким образом, чтобы по плите протекал постоянный электрический ток; при этом линии тока можно будет считать вертикальными, а эквипотенциальные линии — горизонтальными. Общую силу тока в цепи мы будем считать равной длине горизонтальной стороны плиты, а разность потенциалов между верхним и нижним

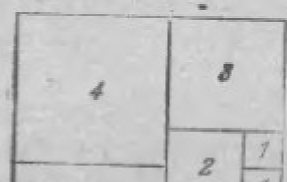


а)

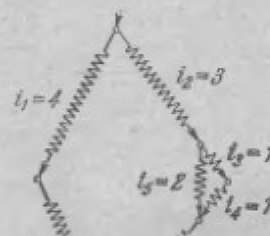


б)

Рис. 40.



а)



б)

Рис. 41.

основаниями — длине вертикальной стороны (таким образом, в случае разбиения квадрата на меньшие квадраты силу тока приходится считать равной разности потенциалов). Будем еще считать, что отдельные квадраты, из которых состоит плита, строго изолированы один от другого вдоль вертикальных разрезов, осуществляющих разбиение

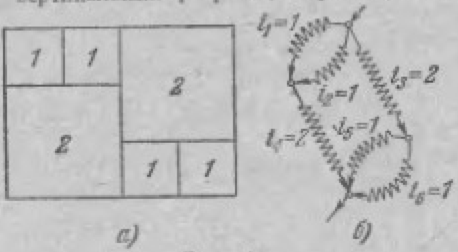


Рис. 42

прямоугольника; вдоль же горизонтальных линий, рассекающих плиту на части, мы свяжем между собой отдельные квадраты проводниками весьма большой (практически бесконечной) проводимости (рис. 43; последнее условие как раз и означает, что с точки зрения электрических свойств сети горизонтальный отрезок отождествляется с одной точкой). При этом все квадраты, на которые разбита плита, будут играть роль проводников единичного сопротивления (ибо вдоль такого проводника отношение U/I напряжения к силе тока будет равно единице) [1],— и мы придем к описанной выше электрической цепи, отвечающей нашему разбиению.

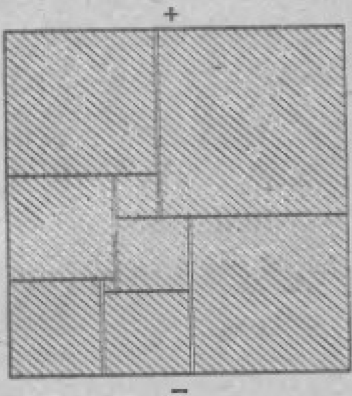


Рис. 43

Задача 2. Нарисуйте электрические цепи, отвечающие разбиениям прямоугольника, изображенным на рис. 16, 17, 20, 21, 22.

Задача 3. Нарисуйте электрические цепи, отвечающие

а) разбиениям квадрата, изображенным на рис. 1, *а* — *г*;

б) разбиениям квадрата, изображенным на рис. 23, 25 и 26.

Задача 4. а) Приведите примеры разбиений прямоугольника на квадраты (разумеется, отличные от приведенных выше) и постройте электрические цепи, отвечающие этим разбиениям.

б) Приведите примеры разветвленных электрических цепей (аналогичных приведенным на рис. 39; 40, *б*; 41, *б* и 42, *б*) и постройте соответствующие этим цепям разбиения прямоугольника на квадраты.

---

[1] Разумеется, с точки зрения строения электрической цепи ничего не изменится от замены квадратов линейными проводниками, соединяющими горизонтальные отрезки (ср. с рис. 32).

Вернемся теперь к графам, отвечающим разбиениям прямоугольника на квадраты. Каждый такой граф составляет «скелет» соответствующей электрической цепи (полностью определяемой направленным графом с заданными весами всех ребер). В этом параграфе мы еще нигде не использовали тот факт, что все квадраты разбиения попарно различны; у нас не были даже исключены разбиения, содержащие равные квадраты, примыкающие один к другому по целой стороне (см. рис. 41 и 42). Если, однако, интересоваться лишь вопросом о разбиении прямоугольника на попарно различные квадраты, то можно с самого начала исключить из рассмотрения графы, содержащие «двуугольники», вроде изображенного на рис. 35, *б*,— ведь мы знаем, что подобный двуугольник отвечает паре равных квадратов, примыкающих друг к другу по вертикальной стороне (рис. 35, *а*; ср. также с рис. 42, *а*, *б*). Аналогично этому, мы можем считать, что рассматриваемый граф не содержит ни одного «колена» $H_pH_qH_r$, образованного ребрами H_pH_q и H_qH_r, из общей вершины H_q которых не выходит ни одно ребро, отличное от ребер H_qH_p и H_qH_r (рис. 44, *а*), — ведь такое «колено», очевидно, отвечает двум равным квадратам, примыкающим друг к другу по горизонтальной стороне (рис. 44, *б*; ср. с рис. 41, *а*, *б*). Таким образом, мы будем далее считать, что *в каждой из $B-2$ «внутренних»* (отличных от самой верхней и самой нижней) *вершин графа сходится не менее трех ребер и каждая из Γ граней графа ограничена не менее чем тремя ребрами.*

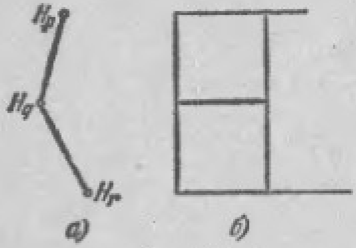


Рис. 44.

Ясно, что из верхней вершины графа может исходить и одно-единственное ребро (см. рис. 45, *а*, *б*). Это, однако, отвечает случаю, когда к верхнему основанию разбиваемого прямоугольника прилегает единственный квадрат,— случаю неинтересному, поскольку ясно, что он сразу сводится к разбиению на квадраты меньшего прямоугольника, получаемого из исходного отсечением верхнего квадрата. Поэтому можно считать, что *из верхней вершины графа исходят не менее двух ребер*; точно так же будем считать, что и *из нижней вершины графа исходят не менее* *двух ребер*. При этом общее число P ребер графа будет не меньше половины следующей суммы:

$$3(B-2)+2\cdot 2=3B-2,$$

— ведь из каждой из $B-2$ «внутренних» вершин графа исходит не менее чем по 3 ребра, а из 2-х «внешних» (т. е. самой верхней и самой нижней) вершин — не менее чем по 2 ребра,

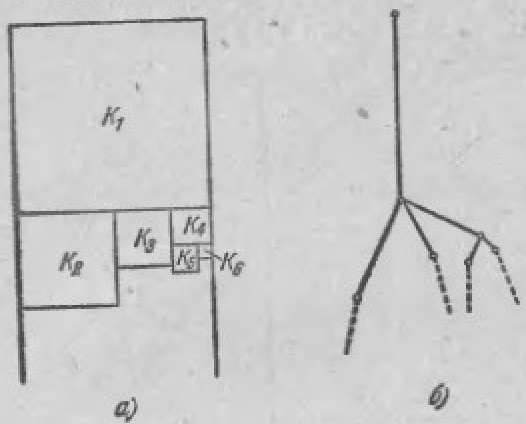


Рис. 45.

причем, пересчитывая таким образом все ребра «по вершинам», мы каждое ребро считаем дважды, поскольку оно соединяет две вершины. Таким образом, имеем

$$2P \geqslant 3B-2$$

или

$$B \leqslant \frac{2P+2}{3}.$$

Подставляя последний результат в формулу Эйлера (Э) (стр. 35), получим

$$\frac{2P+2}{3}-P+\Gamma \geqslant 1$$

или

$$\Gamma \geqslant \frac{P+1}{3}.$$

Заметим теперь, что сопоставить граф разбиению прямоугольника на квадраты можно и отличным от описанного выше путем. Отметим на вертикальных отрезках (сторонах квадратов разбиения) C_1D_1, C_2D_2, ... точки V_1, V_2, ..., которые и примем за вершины графа. При этом точки V_i и V_j, отвечающие двум отрезкам C_iD_i и C_jD_j, мы соединим линией лишь в том случае, если прямым C_iD_i и C_jD_j принадлежат стороны одного квадрата разбиения (ср. рис. 46, *а*, *б* с рис. 32,*а*, *б* на стр. 37). При этом мы получим граф, «двойственный» рассмотренному ранее: вершины такого графа отвечают вертикальным отрезкам

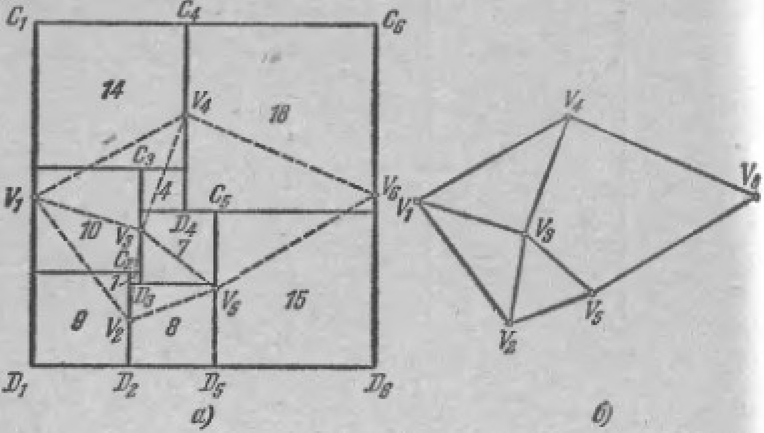


Рис. 46.

разбиения, ребра, как и раньше,— квадратам разбиения, а грани — (отличным от верхнего и нижнего оснований разбиваемого на квадраты прямоугольника) горизонтальным отрезкам разбиения (почему?). Этот граф также можно сделать направленным, выбрав, скажем, направление обхода ребер «слева направо» (т. е. условившись проходить ребро графа в направлении, отвечающем переходу от более левого вертикального отрезка к более правому); ребрам его можно по-прежнему приписывать *веса*, равные длинам сторон квадратов, отвечающих этим ребрам. Полученный метод перехода от исходного графа к двойственному ему (см., например, графы, изображенные на рис. 47, *а*, *б*) можно также рассматривать как некоторый способ построения разветвленной электрической цепи, «двойственной» заданной цепи (это построение, к слову сказать, было известно электрикам задолго до обнаружения связи между электрическими сетями и задачей о разрезании прямоугольника на квадраты).

Число вершин, ребер и граней исходного графа мы по-прежнему будем обозначать буквами B, P и $Г$, а число вершин, ребер и граней двойственного ему графа обозначим через B', P' и $Г'$. При этом, очевидно,

$$Г'+2=B,\ P'=P \text{ и } B'=Г+2,$$

ибо числа B и $Г'+2$ равны числу горизонтальных отрезков нашего разбиения (включая сюда и основания исходного прямоугольника), числа P и P' — числу участвующих в разбиении квадратов и числа $Г+2$ и B' — числу вертикальных

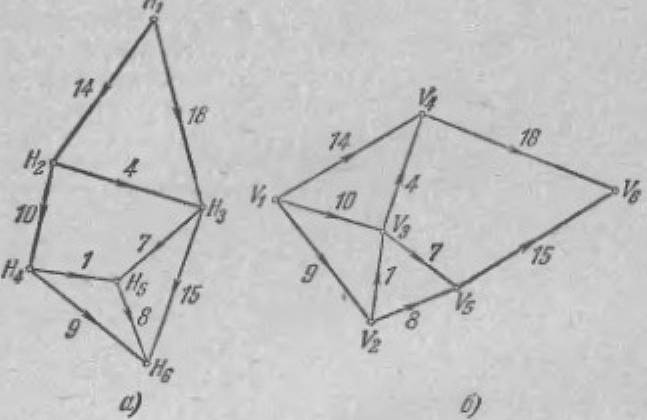


Рис. 47

отрезков (включая и боковые стороны прямоугольника). [Так, например, в случае графов, изображенных на рис. 47, *а*, *б*, имеем $B=Г'+2=6$, $P=P'=9$ и $Г+2=B'=6$ в полном соответствии с рис. 14.] При этом, в точности как выше, устанавливается, что, если исходное разбиение прямоугольника не содержит квадрата, целиком примыкающего к одной из боковых сторон разбиваемого прямоугольника, и если соответствующий граф не содержит ни «двуугольников», ни «колен» (так как иначе исходное разбиение обязательно содержало бы пары равных квадратов, соприкасающихся по целой стороне), то

$$B' \leqslant \frac{2P'+2}{3} \text{ и } Г' \geqslant \frac{P'+1}{3}.$$

Последние два неравенства можно переписать так:

$$\Gamma+2\leqslant\frac{2P+2}{3},\ \text{т. е.}\ \Gamma\leqslant\frac{2P-4}{3}$$

и

$$B-2\geqslant\frac{P+1}{3},\quad \text{т. е.}\quad B\geqslant\frac{P+7}{3}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{P+7}{3}\leqslant B\leqslant\frac{2P+2}{3};\qquad \frac{P+1}{3}\leqslant\Gamma\leqslant\frac{2P-4}{3}.$$

А поскольку величины B и Γ, разумеется, **целые**, то для каждого значения числа P (т. е. для каждого фиксированного числа n квадратов разбиения) мы имеем лишь конечное число возможных значений чисел B и Γ, а следовательно, и конечный набор возможных графов (рассматриваемых лишь с точки зрения общей структуры соответствующей сети линий, т. е. с той точки зрения, при которой учитывается лишь наличие или отсутствие ребер, соединяющих те или иные пары вершин графа). Так, например, при $P=5$ (а меньше пяти число ребер быть не может, что сразу следует из неравенства $\frac{2P-4}{3}\geqslant\Gamma\geqslant\frac{P+1}{3}$) имеем

$$4\leqslant B\leqslant 4\ \text{и}\ 2\leqslant\Gamma\leqslant 2,\ \text{т. е.}\ B=4\ \text{и}\ P=2;$$

при $P=6$ имеем

$$4\frac{1}{3}\leqslant B\leqslant 4\frac{2}{3},$$

откуда уже вытекает, что подобный граф невозможен (ибо ведь число B должно быть целым!); при $P=7$ получаем

$$4\frac{2}{3}\leqslant B\leqslant 5\frac{1}{3}\ \text{и}\ 2\frac{2}{3}\leqslant\Gamma\leqslant 3\frac{1}{3},\quad \text{т. е.}\ B=5\ \text{и}\ \Gamma=3,$$

и т. д.

В нижеследующей таблице собраны все допустимые пары значений B и Γ [1]), отвечающие всевозможным $P\leqslant 14$:

P	$(B,\ \Gamma)$	P	$(B,\ \Gamma)$
5	(4,2)	10	(7,4), (6,5)
6	—	11	(8,4), (7,5), (6,6)
7	(5,3)	12	(8,5), (7,6)
8	(6,3), (5,4)	13	(9,5), (8,6), (7,7)
9	(6,4)	14	(10,5), (9,6), (8,7), (7,8)

[1]) Ясно, что в силу формулы Эйлера (Э) при данном P значение B уже однозначно определяет и значение Γ.

Использование этой таблицы превращает нахождение разложений прямоугольников на сравнительно небольшое число квадратов в принципиально несложную, хотя и довольно скучную, работу. Так, например, единственный возможный граф, отвечающий разбиению прямоугольника на 5 квадратов, изображен на рис. 48 (ср. рис. 5). Обозначив веса ребер HH_1, HH_2, H_1H_2, H_1H' и H_2H' буквами p_1, p_2, p, p_1' и p_2', как это указано на рис. 48, мы получим следующую систему равенств, связывающих числа [1]) p_1, p_2, p, p_1' и p_2' (слева выписаны равенства, отвечающие «правилам Кирхгофа», связанным с вершинами графа, а справа — равенства, относящиеся к граням графа):

$$(H_1)\quad p_1 = p_1' + p, \qquad (HH_1H_2)\quad p_1 + p = p_2,$$
$$(H_2)\quad p_2' = p_2 + p, \qquad (H_1H_2H')\quad p_2' + p = p_1'.$$

Отсюда следует, что

$$p_1 + p_2 + p_1' + p_2' = (p_1' + p) + (p_1 + p) + (p_2' + p) + (p_2 + p) = p_1 + p_2 + p_1' + p_2' + 4p$$

и, значит, $p=0$, что невозможно.

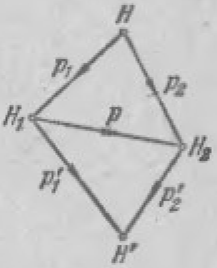


Рис. 48.

З а д а ч а 5. Нарисуйте графы (электрические цепи), двойственные графам (электрическим цепям), изображенным на рис. 40, *б*; 41, *б* и 42, *б*.

З а д а ч а 6. Изобразите электрические цепи, двойственные цепям, которые требуется построить в задачах 2—4 (стр. 45).

З а д а ч а 7. Может ли граф с расставленными на ребрах весами, удовлетворяющими сформулированным на стр. 41 условиям, быть двойственным **т а к о м у ж е** графу, т. е. графу, вершины A_1', A_2', ..., A_B' и ребра r_1', r_2', ..., r_P' которого можно сопоставить вершинам A_1, A_2, ..., A_B и ребрам r_1, r_2, ..., r_P исходного графа так, что ребра r_k и r_k' (где $k=1,2,\ldots,P$) имеют одинаковый вес, а вершины A_i и A_j первого графа (где i, $j=1,2,\ldots,B$ и $i\neq j$) соединены ребром r_k в том и только в том случае, если вершины A_i' и A_j' второго графа соединены ребром r_k'. Если это возможно, то приведите пример такого графа.

З а д а ч а 8. С помощью «перебора» графов с числом ребер $P\leqslant 9$ (см. таблицу на стр. 50) установите, что разбиение прямоугольника на $n\leqslant 9$ попарно неравных квадратов невозможно и что существуют только два разбиения прямоугольника на 9 неповторяющихся квадратов.

§ 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Цель настоящего параграфа состоит в доказательстве следующей теоремы:

Прямоугольник P тогда и только тогда можно разрезать на попарно неравные квадраты, когда стороны этого прямоугольника соизмеримы.

[1]) Число p может быть и отрицательным (ср. с текстом, напечатанным мелким шрифтом на стр. 42).

Поскольку прямоугольник с соизмеримыми сторонами (т. е. с рациональным отношением сторон) — это, очевидно, такой прямоугольник, который можно разрезать на равные квадраты (см., например, рис. 49, где отношение сторон прямоугольника равно 7 : 4), то эту теорему можно также сформулировать следующим образом: *прямоугольник P тогда и только тогда можно разрезать на попарно неравные квадраты, когда его можно разрезать на равные квадраты.*

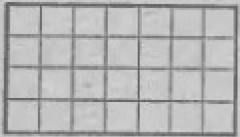


Рис. 49.

Доказательство «основной теоремы» распадается на два совершенно различных по характеру этапа: доказательство достаточности условия теоремы (доказательство «тогда») и доказательство его необходимости (доказательство «только тогда»).

Доказательство. *Необходимость: если прямоугольник P можно разрезать на квадраты* (возможно и не попарно различные!), *то стороны этого прямоугольника соизмеримы.*

Пусть мы имеем какое-то разбиение прямоугольника P на n квадратов. Обозначим стороны квадратов разбиения через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а стороны прямоугольника P — через X и Y. Нам надо доказать, что $X : Y$—рациональное число.

Соотношения, связывающие $n+2$ величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, X, Y, можно получить следующим образом: сумму длин квадратов, примыкающих к каждой стороне прямоугольника, приравниваем длине этой стороны (т. е. X или Y); далее, для каждого (вертикального или горизонтального) отрезка, к которому с обеих сторон примыкает целое число квадратов разбиения, приравниваем суммы длин сторон квадратов, примыкающих к этому отрезку с одной и с другой стороны. Полученные при этом соотношения можно рассматривать как систему линейных однородных (т. е. без свободных членов) уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, X, Y с коэффициентами, равными $+1$ или -1. (Здесь мы считаем, что все неизвестные перенесены в одну часть.) Исходному разбиению прямоугольника P соответствует некоторое положительное (т. е. задаваемое $n+2$ положительными числами) решение этой системы.

Проиллюстрируем сказанное на примере разбиения прямоугольника на 10 квадратов, которое изображено на рис. 50. В этом случае соотношения, о которых здесь идет речь, будут иметь вид:

$$
\begin{array}{ll}
x_1+x_2+x_3=X, & x_1+x_8=Y, \\
x_4+x_5=x_2, & x_7+x_9=x_8, \\
x_6+x_{10}=x_5+x_3, & x_2+x_4=x_1+x_7, \\
x_8+x_7=x_1, & x_5+x_6=x_4, \\
x_9=x_7+x_4+x_6 & x_{10}=x_6+x_9, \\
(X=x_8+x_9+x_{10}). & x_3=x_2+x_5. \\
 & (Y=x_3+x_{10});
\end{array}
$$

они образуют систему из 11 однородных уравнений с 12 неизвестными (в скобках стоят уравнения, являющиеся, как легко проверить, следствиями предшествующих уравнений).

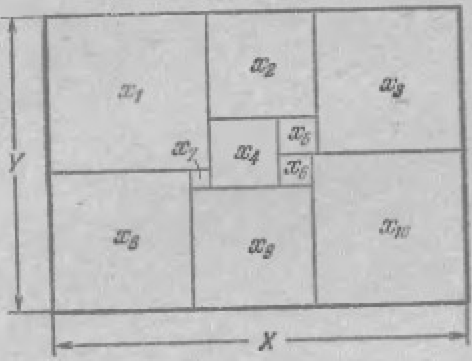


Рис. 50.

Система уравнений первой степени обычно решается следующим образом. Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражается через остальные неизвестные; полученное выражение подставляется во все остальные уравнения системы. Тогда первоначальная система уравнений переходит в новую систему, которая состоит из м е н ь ш е г о числа уравнений и содержит м е н ь ш е неизвестных. Затем в этой новой системе еще какое-то неизвестное выражается через остальные и т. д. При этом общее число уравнений системы и число неизвестных все время уменьшается. Заметим теперь, что все выводимые таким путем системы уравнений, так же как и исходная система, будут однородными, откуда следует, что могут представиться следующие три случая:

А. *В процессе последовательного исключения из системы неизвестных мы в конце концов придем к единственному* (*однородному!*) *уравнению с одним неизвестным*, т. е. к уравнению вида

$$ax = 0 \quad \text{или} \quad x = 0,$$

где x — одно из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n, X, Y$. А так как все остальные неизвестные системы в процессе их исключения мы выражали через иные неизвестные и в конце концов через x, причем выражали «однородным» образом, т. е. в виде формул, не содержащих свободных членов, то окончательно получаем

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = X = Y = 0.$$

Очевидно, что для нашей системы такой случай не может иметь места, так как заранее известно, что эта система имеет по крайней мере одно положительное решение (соответствующее данному разбиению).

Б. *В процессе последовательного исключения неизвестных из системы мы придем к единственному (однородному) уравнению с двумя неизвестными:*

$$bx - ay = 0 \quad \text{или} \quad x : y = a : b,$$

где x и y — какие-то два из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n, X, Y$. А так как в процессе исключения неизвестных из системы мы последовательно выражали все неизвестные через остающиеся и, значит, окончательно — через x и y, причем все эти неизвестные выражались через x и y однородно, т. е. формулами типа $px + qy$, то, зная отношение $x : y = a : b$, мы можем найти отношение каждого из наших неизвестных к x или к y. Таким образом, в этом случае любое решение нашей системы таково, что

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n : X : Y = a_1 : a_2 : \ldots : a_n : A : B,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, A, B$ — какие-то определяемые в процессе решения системы числа.

Заметим теперь, что наша система уравнений имеет только целочисленные коэффициенты (точнее, все отличные от нуля коэффициенты исходной системы уравнений равны $+1$ или -1). Поэтому на каждом этапе процесса ее решения в качестве коэффициентов уравнений могут фигурировать лишь отношения целых чисел, т. е. рациональные числа,— иррациональным числам здесь взяться неоткуда. Следовательно, и все числа $a_1, a_2, \ldots$

$\ldots, a_n, A, B$ также можно считать рациональными; в частности, и *отношение*

$$X:Y = A:B$$

будет *р а ц и о н а л ь н ы м.*

Рассмотрим, например, систему уравнений, соответствующую разбиению, изображенному на рис. 50:

$$(1)\ x_1 + x_2 + x_3 = X; \quad (2)\ x_4 + x_5 = x_2; \quad (3)\ x_6 + x_{10} = x_5 + x_3;$$
$$(4)\ x_8 + x_7 = x_1; \quad (5)\ x_9 = x_7 + x_4 + x_6; \quad (6)\ x_1 + x_8 = Y;$$
$$(7)\ x_7 + x_9 = x_8; \quad (8)\ x_2 + x_4 = x_1 + x_7; \quad (9)\ x_5 + x_6 = x_4;$$
$$(10)\ x_{10} = x_6 + x_9; \quad (11)\ x_3 = x_2 + x_5.$$

Последовательно из уравнений (11), (2), (9), (3), (10), (5), (7), (4), (1) и (6) находим

$$\begin{aligned}
x_5 &= x_3 - x_2;\\
x_4 &= x_2 - x_5 = 2x_2 - x_3;\\
x_6 &= x_4 - x_5 = 3x_2 - 2x_3;\\
x_{10} &= x_5 + x_3 - x_6 = 4x_3 - 4x_2;\\
x_9 &= x_{10} - x_6 = 6x_3 - 7x_2;\\
x_7 &= x_9 - x_4 - x_6 = 9x_3 - 12x_2;\\
x_8 &= x_7 + x_9 = 15x_3 - 19x_2;\\
x_1 &= x_8 + x_7 = 24x_3 - 31x_2;\\
X &= x_1 + x_2 + x_3 = 25x_3 - 30x_2;\\
Y &= x_1 + x_8 = 39x_3 - 50x_2.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в (единственно неиспользованное до сих пор!) уравнение (8), получаем

$$3x_2 - x_3 = 33x_3 - 43x_2,$$

т. е.

$$34x_3 = 46x_2 \quad \text{или} \quad x_2 : x_3 = 17:23.$$

А теперь легко выводим, что

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 : x_9 : x_{10} : X : Y =$$
$$= 25:17:23:11:6:5:3:22:19:24:65:47.$$

Итак, мы видим, что исходное разбиение с точностью до подобия совпадает с изображенным на рис. 19 (стр. 25) разбиением прямоугольника с отношением сторон 65:47 на 10 квадратов.

В. *В процессе последовательного исключения неизвестных* $x_1, x_2, \ldots$ (условимся считать, что неизвестные исключаются именно в этом порядке[1])) *мы придем к одному* (*однородному*)

---

[1]) Или условимся обозначать исключаемые переменные через $x_1, x_2, \ldots$ (переменные X и Y мы сохраним до конца процедуры).

уравнению, содержащему **б о л ь ш е д в у х** *неизвестных*; это уравнение мы запишем так:

$$x_r = q_{r+1}x_{r+1} + q_{r+2}x_{r+2} + \ldots + q_n x_n + Q_1 X + Q_2 Y.$$

При этом все остальные переменные выразятся через переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n, X, Y$ формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{r+1}x_{r+1} + a_{r+2}x_{r+2} + \ldots + a_n x_n + A_1 X + A_2 Y, \\ x_2 &= b_{r+1}x_{r+1} + b_{r+2}x_{r+2} + \ldots + b_n x_n + B_1 X + B_2 Y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r-1} &= p_{r+1}x_{r+1} + p_{r+2}x_{r+2} + \ldots + p_n x_n + P_1 X + P_2 Y. \end{aligned}$$

Давая величинам $x_{r+1}, \ldots, x_n, X, Y$ произвольные значения (в том числе и такие, что $X:Y$ иррационально!), можно получить любое решение системы. Покажем, однако, что для исходной системы этот случай не может иметь места.

Предположим противное. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n, X, Y$ — решение, соответствующее данному разбиению прямоугольника на квадраты. Слегка изменим теперь значение Y, заменив его на $Y+\varepsilon$. При этом и величины $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_r$ изменятся: их придется заменить на

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{r+1}x_{r+1} + a_{r+2}x_{r+2} + \ldots + a_n x_n + \\ &\qquad + A_1 X + A_2 Y' = x_1 + A_2\varepsilon, \\ x_2' &= b_{r+1}x_{r+1} + b_{r+2}x_{r+2} + \ldots + b_n x_n + \\ &\qquad + B_1 X + B_2 Y' = x_2 + B_2\varepsilon, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r' &= q_{r+1}x_{r+1} + q_{r+2}x_{r+2} + \ldots + q_n x_n + \\ &\qquad + Q_1 X + Q_2 Y' = x_r + Q_2\varepsilon. \end{aligned}$$

Если при этом выбрать ε достаточно малым, то все числа $Y', x_1', x_2', \ldots, x_r'$ останутся положительными и деформация исходного разбиения прямоугольника P со сторонами X и Y на n квадратов со сторонами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которой прямоугольник заменится близким к нему прямоугольником P' со сторонами X и Y', а квадраты — новыми квадратами со сторонами $x_1', x_2', \ldots, x_r', x_{r+1}, \ldots, x_n$, не приведет ни к каким противоречиям в схеме расположения квадратов (напомним, что числа $X, Y', x_1', x_2', \ldots x_r', x_{r+1}, \ldots, x_n$ удовлетворяют исходной системе, выражающей условия примыкания квадратов друг к другу и к сторонам прямоугольника, в соответствии со схемой расположения квадратов, задаваемой исходным разбиением). Покажем теперь, что получаемое таким образом предположение о существовании бесконечно большого числа близких к друг другу разбиений прямоугольников на квадраты, получаемых при всех достаточно малых ε, приводит к противоречию[1]).

Действительно, поскольку прямоугольник со сторонами X и Y разбивается на n квадратов со сторонами $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$, то

$$XY = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 + x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2 \qquad (*)$$

(площадь прямоугольника равна сумме площадей всех составляющих его квадратов). Точно так же, поскольку прямоугольник со сторонами X и $Y' = Y + \varepsilon$ разбивается на квадраты со сторонами $x_1' = x_1 + A_2\varepsilon$, $x_2' = x_2 + B_2\varepsilon, \ldots, x_r' = x_r + Q_2\varepsilon$, $x_{r+1}, \ldots, x_n$, то

$$XY' = (x_1')^2 + (x_2')^2 + \ldots + (x_r')^2 + x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

или

$$X(Y + \varepsilon) = (x_1 + A_2\varepsilon)^2 + (x_2 + B_2\varepsilon)^2 + \ldots \\ \ldots + (x_r + Q_2\varepsilon)^2 + x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$XY + X\varepsilon = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 + x_{r+1}^2 + \ldots + x_n^2 + \\ + 2A_2x_1\varepsilon + 2B_2x_2\varepsilon + \ldots + 2Q_2x_r\varepsilon + \\ + A_2^2\varepsilon^2 + B_2^2\varepsilon^2 + \ldots + Q_2^2\varepsilon^2. \qquad (**)$$

Используя равенство (*) и сокращая обе части оставшегося выражения на ε, получаем

$$X = 2(A_2x_1 + B_2x_2 + \ldots + Q_2x_r) + (A_2^2 + B_2^2 + \ldots + Q_2^2)\,\varepsilon.$$

Так как

$$A_2^2 + B_2^2 + \ldots + Q_2^2 \neq 0$$

(числа $A_2, B_2, \ldots, Q_2$ не могут все равняться 0, поскольку величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не могут вовсе не зависеть от Y, что очевидно, например, из геометрических соображений[2])),

---

[1]) Развитые здесь (впрочем, достаточно убедительные) соображения геометрического характера могут быть заменены чисто алгебраическими (т. е. не апеллирующими к чертежу) рассуждениями, обладающими большей доказательной силой; они, однако, довольно громоздки (см., например, М. Дэн [1]).

[2]) Ибо сумма длин сторон квадратов, примыкающих к стороне длины Y, равна вполне определенному числу Y, а не какому угодно числу!

то из последнего равенства следует

$$\varepsilon=\frac{X-2(A_2x_1+B_2x_2+\ldots+Q_2x_r)}{A_2^2+B_2^2+\ldots+Q_2^2}.$$

Таким образом, ε должно однозначным образом определяться величинами X, $x_1,\ldots,x_r$, $A_2,\ldots,Q_2$, в то время как в наших рассуждениях ε — это любое достаточно малое число. Тем самым мы и получили требуемое противоречие.

Таким образом, можно утверждать, что *если система линейных уравнений выписана на основе какого-то заданного нам разбиения прямоугольника P на квадраты, то для нее имеет место положение, охарактеризованное выше как случай* Б. Любое решение этой системы соответствует одному только данному разбиению (или разбиению, несущественно отличающемуся от данного — получаемому из исходного преобразованием подобия), причем отношение сторон $X:Y=A:B$ разбиваемого прямоугольника обязательно рационально.

Этим и завершается доказательство необходимости условия теоремы.

Достаточность: если стороны прямоугольника P соизмеримы, то этот прямоугольник можно разрезать на попарно различные квадраты.

Достаточно убедиться в том, что *существует сколь угодно много различных разбиений квадрата на попарно неравные квадраты, ни один из которых не участвует в двух различных разбиениях.* В самом деле, каждый прямоугольник с соизмеримыми длинами сторон можно разрезать на некоторое число равных квадратов: ведь соизмеримость сторон a и b прямоугольника P означает, что эти стороны имеют общую меру; если эта мера укладывается в стороне a целое число m раз, а в стороне b — n раз, то весь прямоугольник можно разрезать на mn равных квадратов (см. выше рис. 49). Если теперь каждый из этих равных квадратов так разбить на попарно неравные квадраты, чтобы ни один из квадратов разбиения одного из этих mn квадратов не повторялся в разбиении другого квадрата, то весь большой прямоугольник разобьется на попарно различные квадраты.

Итак, докажем, что существует сколь угодно много разбиений квадрата на попарно неравные квадраты, удовлетворяющих высказанному условию. Доказательство проведем в два этапа [1]).

1°. *Существует сколь угодно много различных разбиений квадрата на попарно неравные квадраты.*

Пусть P_0 — некоторый прямоугольник (рис. 51, *а*). Рассмотрим прямоугольник, подобный прямоугольнику P_0, причем такой, что его большая сторона равна меньшей стороне первоначального прямоугольника. Приложив этот прямоугольник к прямоугольнику P_0, получим некоторый прямоугольник P_1 (рис. 51, *б*). Произведем теперь такую же операцию с прямоугольником P_1 и получим прямоугольник P_2 (рис. 51, *в*); затем произведем ту же операцию с прямоугольником P_2 и получим прямоугольник P_3 и т. д. Таким образом, получим ряд прямоугольников P_0, P_1, P_2, P_3,... с одинаковой меньшей стороной; при этом прямоугольник P_1 состоит из двух прямоугольников, подобных P_0; прямоугольник P_2 — из четырех прямоугольников, подобных P_0; прямоугольник P_3 — из восьми прямоугольников, подобных P_0, и т. д.; вообще, прямоугольник P_k (где k — любое целое положительное число) состоит из из 2^k прямоугольников, подобных P_0. Ясно, что если прямоугольник P_0 можно разбить на ряд попарно неравных квадратов, то и все прямоугольники, подобные P_0, тоже можно разбить на попарно неравные квадраты; поэтому также и все прямоугольники P_1, P_2, P_3,... можно разбить на квадраты. Однако мы еще не можем утверждать, что все квадраты, на которые разбивается каждый из прямоугольников P_1, P_2, P_3,... будут попарно различны.

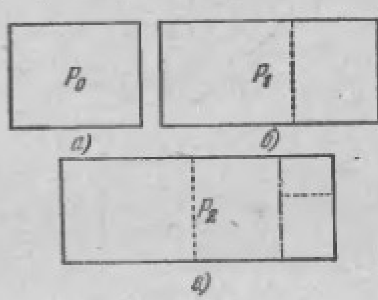


Рис. 51.

Предположим теперь, что P_0 — прямоугольник с отношением сторон 422 : 593, который, как указывалось в § 1 (см. рис. 22, *а*, *б* на стр. 28), можно двумя различными способами разбить на попарно неравные

[1]) Близкое, однако несколько более сложное доказательство этого же факта приведено в п. 3 § 4 (см. текст, напечатанный на стр. 78—87 мелким шрифтом).

квадраты. В этом случае и каждый из прямоугольников $P_1, P_2, P_3, \ldots$ можно будет двумя способами разбить на квадраты, используя всегда только первое или всегда только второе разбиение прямоугольника P_0. Мы докажем, что *каждый из прямоугольников $P_1, P_2, P_3, \ldots$ разбивается двумя способами* именно *на попарно неравные квадраты* и что *ни один из квадратов, участвующих в разбиении какого-либо прямоугольника P_k ($k=0, 1, 2, 3, \ldots$) одним способом, не повторяется в разбиении того же прямоугольника другим способом.*

Пусть меньшая сторона прямоугольника P_0 равна 1, а большая сторона равна 593/422; обозначим ее через u_0. Большую сторону прямоугольника P_1 обозначим через u_1, большую сторону прямоугольника P_2 — через u_2 и т. д. (меньшая сторона всех этих прямоугольников равна 1). Из закона построения прямоугольников следует, что для любого k

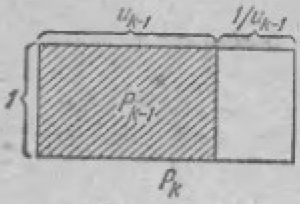


Рис. 52.

$$u_k = u_{k-1} + \frac{1}{u_{k-1}},$$

— ведь прямоугольник P_k получается, если приложить к прямоугольнику P_{k-1} со сторонами 1, u_{k-1} прямоугольник, подобный P_{k-1}, большая сторона которого равна 1, т. е. прямоугольник со сторонами $1/u_{k-1}$, 1; поэтому стороны прямоугольника P_k равны

$$1 \quad \text{и} \quad u_{k-1} + \frac{1}{u_{k-1}}$$

(см. рис. 52). Разность

$$u_k - u_{k-1} = \frac{1}{u_{k-1}}$$

обозначим через v_k; очевидно, что v_k есть сторона прямоугольника, который надо приложить к прямоугольнику P_{k-1} для того, чтобы получить прямоугольник P_k.

Прямоугольник P_1 состоит из двух прямоугольников, подобных P_0; меньшая сторона одного из этих прямоугольников (прямоугольника P_0) равна 1, а меньшая сторона другого прямоугольника равна $\frac{1}{u_0} = v_1$. Прямоугольник P_2 состоит из двух прямоугольников, подобных P_1; меньшая сторона одного из этих прямоугольников (прямоугольника P_1) равна 1, а меньшая сторона другого прямоугольника равна $\frac{1}{u_1}=v_2$. Учитывая, что P_1 состоит из двух прямоугольников, подобных P_0, мы заключим, что P_2 состоит из четырех прямоугольников, подобных P_0; меньшие стороны двух из них (составляющих прямоугольник P_1) равны 1 и v_1, а меньшие стороны двух других равны $v_2\cdot 1$ и $v_2\cdot v_1$. Аналогично, прямоугольник P_3 состоит из двух прямоугольников, подобных P_2, меньшие стороны которых равны 1 и $\frac{1}{u_2}=v_3$. Отсюда следует, что P_3 состоит из восьми прямоугольников, подобных P_0; меньшие стороны четырех из них (составляющих прямоугольник P_2) равны 1, v_1, v_2 и v_2v_1, а меньшие стороны остальных четырех равны $v_3\cdot 1$, $v_3\cdot v_1$, $v_3\cdot v_2$ и $v_3\cdot v_2v_1$. Точно так же показывается, что прямоугольник P_4 состоит из шестнадцати прямоугольников, подобных P_0; меньшие стороны этих прямоугольников равны 1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, $v_1v_2v_3$, $v_1v_2v_4$, $v_1v_3v_4$, $v_2v_3v_4$ и $v_1v_2v_3v_4$. Аналогично определяются размеры 2^k прямоугольников (подобных P_0), из которых состоит прямоугольник P_k (где $k=1, 2, 3, 4, \ldots$).

Пусть x — сторона некоторого квадрата из разбиения прямоугольника P_k. Этот квадрат входит в состав одного из 2^k прямоугольников (подобных P_0), из которых составляется прямоугольник P_k; коэффициент подобия здесь равен какому-то произведению $v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_n}$. Будем считать, что сомножители в таком произведении расположены в порядке возрастания их номеров, которые различны между собой и каждый из которых не больше k, т. е. $1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_n\leqslant k$; отсюда следует, что и число сомножителей не превосходит k, т. е. $n\leqslant k$. Обозначим сторону квадрата разбиения прямоугольника P_0, отвечающего нашему квадрату из разбиения прямоугольника, подобного P_0, через c; тогда, очевидно,

$$x=v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_n}c.$$

Предположим теперь, что для некоторого прямоугольника P_r сторона x какого-то квадрата в одном из двух возможных разбиений равна стороне y какого-то другого квадрата в том же самом или в другом разбиении того же самого прямоугольника P_s. Пусть

$$x=v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_n}c, \quad y=v_{j_1}v_{j_2}\ldots v_{j_m}d,$$

где c и d — стороны соответствующих квадратов разбиения прямоугольника P_0, причем

$$1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_n\leqslant r, \quad 1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_m\leqslant r.$$

Таким образом, получаем равенство

$$v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_n}c=v_{j_1}v_{j_2}\ldots v_{j_m}d,$$

из которого следует, что

$$\frac{d}{c}=\frac{v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_n}}{v_{j_1}v_{j_2}\ldots v_{j_m}}; \tag{A}$$

здесь мы можем считать, что все сомножители в числителе и в знаменателе правой части различны, так как в противном случае мы просто произвели бы сокращение.

Докажем теперь, что равенство (A) (т. е. равенство $x=y$) невозможно. Для доказательства этого утверждения, являющегося основным в дальнейших рассуждениях, нам понадобятся некоторые предварительные рассмотрения.

Из того, что число $u_0=593/422$ рационально, следует, что все числа

$$u_1=u_0+\frac{1}{u_0}, \quad u_2=u_1+\frac{1}{u_1}, \quad u_3=u_2+\frac{1}{u_2}, \ldots$$

рациональны. Но в таком случае и все числа

$$v_1=\frac{1}{u_0}, \quad v_2=\frac{1}{u_1}, \quad v_3=\frac{1}{u_2}, \ldots$$

тоже будут рациональными; следовательно, они могут быть представлены в виде

$$v_1=\frac{p_1}{q_1}, \quad v_2=\frac{p_2}{q_2}, \quad v_3=\frac{p_3}{q_3}, \ldots,$$

где p_k и q_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ — взаимно простые целые положительные числа. Равенство (A) примет теперь вид

$$\frac{d}{c}=\left(\frac{p_{i_1}}{q_{i_1}}\cdot\frac{p_{i_2}}{q_{i_2}}\cdots\frac{p_{i_n}}{q_{i_n}}\right):\left(\frac{p_{j_1}}{q_{j_1}}\cdot\frac{p_{j_2}}{q_{j_2}}\cdots\frac{p_{j_m}}{q_{j_m}}\right)=$$

$$=\frac{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}q_{j_1}q_{j_2}\cdots q_{j_m}}{p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_m}q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_n}}. \tag{Б}$$

Постараемся теперь уловить *закон, по которому образуются числа p_k и q_k*. Как мы знаем,

$$u_k=\frac{1}{v_{k+1}}=u_{k-1}+\frac{1}{u_{k-1}}=\frac{1}{v_k}+v_k.$$

Но

$$\frac{1}{v_{k+1}}=\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{v_k}+v_k=\frac{q_k}{p_k}+\frac{p_k}{q_k}=\frac{p_k^2+q_k^2}{p_kq_k},$$

откуда следует, что

$$\frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}=\frac{p_k^2+q_k^2}{p_kq_k} \tag{1}$$

или [1])

$$p_{k+1}=p_kq_k, \qquad q_{k+1}=p_k^2+q_k^2. \tag{1a}$$

Из равенств (1a) можно заключить, что:

а) $$q_{k+1}>q_k;$$

б) *число q_{k+1} взаимно просто с каждым из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}$ и $q_1, q_2, \ldots, q_k$.*

Первое из этих утверждений непосредственно следует из равенства $q_{k+1}=p_k^2+q_k^2$; однако второе нуждается еще в доказательстве. При этом нам достаточно показать, что *q_{k+1} взаимно просто с каждым из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$ и p_1*, поскольку в силу первой из формул (1a)

$$p_2=p_1q_1, \quad p_3=p_2q_2=p_1q_1q_2, \quad p_4=p_3q_3=p_1q_1q_2q_3, \ \ldots,$$

и, вообще,

$$p_i=p_1q_1q_2\cdots q_{i-1}, \tag{2}$$

где $i=2, 3, 4, \ldots, k+1$ (достаточно, однако, ограничиться значениями $i=2,3,\ldots,k$, так как заранее известно, что числа q_{k+1} и p_{k+1} взаимно просты).

Далее, (2) и второе из равенств (1a) (в котором следует положить $k=i$) дают

$$q_{i+1}=p_1^2q_1^2q_2^2\cdots q_{i-1}^2+q_i^2. \tag{3}$$

---

[1]) Так как числа p_k и q_k **взаимно просты**, то и числа $p_k^2+q_k^2$ и p_kq_k взаимно просты, ибо сумма $p_k^2+q_k^2$ не может делиться ни на один из простых делителей числа p_k и ни на один из простых делителей числа q_k. Поэтому равенство (1), в левой и в правой части которого стоят **несократимые** дроби, равносильно равенствам (1a).

Теперь легко доказать утверждение б). Действительно, в силу (1а)

$$q_2 = p_1^2 + q_1^2,$$

откуда, поскольку числа p_1 и q_1 (т. е. 422 и 593, так как $\frac{p_1}{q_1} = v_1 = \frac{1}{u_0} = \frac{422}{593}$) взаимно просты, следует, что q_2 взаимно просто с p_1 и q_1. Из (3) последовательно получаем:

$$q_3 = p_1^2 q_1^2 + q_2^2,$$

откуда, поскольку q_2 взаимно просто с p_1 и q_1, вытекает, что q_3 взаимно просто с p_1, q_1 и q_2;

$$q_4 = p_1^2 q_1^2 q_2^2 + q_3^2,$$

откуда, поскольку q_3 взаимно просто с p_1, q_1 и q_2, выводим, что q_4 взаимно просто с p_1, q_1, q_2 и q_3 и т. д.; наконец, из равенства (3) (в котором следует положить $i=k$) вытекает, что если q_k взаимно просто с $p_1, q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$ (а это устанавливается предшествующим шагом рассуждения), то q_{k+1} взаимно просто с числами $p_1, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1}$ и q_k, что и требовалось доказать [1]).

Итак, допустим, что выполняется равенство (Б), равносильное равенству (А). Предположим для определенности, что $j_m > i_n$. [Рассуждения почти не изменились бы, если бы мы предположили $i_n > j_m$; равенство $j_m = i_n$ исключено, так как сомножители числителя и знаменателя в правой части формулы (А) мы условились считать различными.] В таком случае, в силу б) множитель q_{j_m} числителя дроби, являющейся правой частью формулы (Б), не может сократиться с каким-либо другим множителем знаменателя той же дроби. Но отношение d/c есть отношение каких-то двух чисел из наборов (I) и (II) 26 целых чисел (стр. 27) — сторон квадратов, на которые двумя способами разбивается прямоугольник со сторонами 422 и 593. Так как самым большим из этих чисел является 247, то в числителе дроби, стоящей в левой части соотношения (Б), не может стоять число, большее 247. Однако так как $q_{j_m} > q_1 = 593$, то числитель правой части соотношения (Б) содержит (не сокращаемый ни с каким множителем знаменателя!) множитель, больший 593.

---

[1]) Здесь, как и в некоторых случаях выше, используется *метод математической индукции* (см., например, И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом, О математической индукции, «Наука», 1967).

Полученное противоречие и доказывает, что равенство (Б) никак не может иметь места.

Итак, мы доказали, что равенство (Б) — а значит, и равносильное ему равенство (А) — невозможно, а следовательно, *никакие два из квадратов, на которые разбивается одним или другим способом какой-либо из прямоугольников* P_k ($k=0, 1, 2, 3, \ldots$), *не равны между собой*. Отсюда уже легко показать, что *существует как угодно много различных разбиений квадрата на попарно неравные квадраты*.

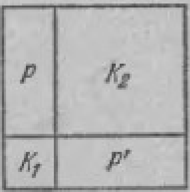


Рис. 53.

Действительно, разделим стороны квадрата K в отношении сторон прямоугольника P_k и разобьем квадрат на два меньших квадрата K_1 и K_2 и на два прямоугольника P и P', подобных P_k (рис. 53). Затем каждый из прямоугольников P и P' разобьем на попарно неравные квадраты, причем разными способами; при этом весь квадрат K разобьется на попарно неравные квадраты. Таким образом, получим бесконечную цепочку разбиений квадрата на попарно неравные квадраты, отвечающих прямоугольникам P_0, P_1, P_2, $P_3, \ldots$ (первое из них — это разбиение квадрата на 28 попарно неравных квадратов, изображенное на рис. 23) [1]).

2°. *Существует сколь угодно много различных разбиений квадрата на попарно неравные квадраты, причем каждый из квадратов, фигурирующих в каком-либо одном разбиении, уже не повторяется ни в каком другом разбиении.*

При доказательстве этого утверждения мы будем исходить из построенной выше бесконечной цепочки разбиений квадрата на попарно неравные квадраты. Докажем предварительно (и это доказательство будет являться основным в рассуждениях настоящего пункта), что *отношение большей стороны прямоугольника* P_k *к его меньшей стороне*

---

[1]) Так как прямоугольник P_k состоит из 2^k прямоугольников, подобных P_0, и каждый из этих прямоугольников разбивается на 13 попарно различных квадратов, то каждый из прямоугольников P и P' разбивается на $2^k \cdot 13$ попарно различных квадратов; поэтому весь квадрат K разбивается на

$$n_k = 2 \cdot 2^k \cdot 13 + 2 = 2^{k+1} \cdot 13 + 2$$

попарно различных квадратов. [Ясно, что в соответствии с рис. 23 $n_0 = 2 \cdot 13 + 2 = 28$; далее, $n_1 = 4 \cdot 13 + 2 = 54$, $n_2 = 8 \cdot 13 + 2 = 106$ и т. д.]

неограниченно возрастает с ростом номера k. Действительно, отношение $u_k : 1$ сторон прямоугольника P_k связано с отношением $u_{k-1} : 1$ сторон прямоугольника P_{k-1} соотношением

$$u_k = u_{k-1} + \frac{1}{u_{k-1}},$$

поэтому $u_k > u_{k-1}$. Далее имеем

$$u_k = \frac{1}{u_{k-1}} + u_{k-1} = \frac{1}{u_{k-1}} + \left(\frac{1}{u_{k-2}} + u_{k-2}\right) =$$
$$= \frac{1}{u_{k-1}} + \frac{1}{u_{k-2}} + \left(\frac{1}{u_{k-3}} + u_{k-3}\right) = \ldots$$
$$\ldots = \frac{1}{u_{k-1}} + \frac{1}{u_{k-2}} + \frac{1}{u_{k-3}} + \ldots + \frac{1}{u_0} + u_0.$$

Предположим теперь, что все числа u_k *ограничены* некоторым целым числом N, т. е. $u_k < N$ при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ В таком случае все числа $\frac{1}{u_k}$ должны быть больше $\frac{1}{N}$ и, следовательно,

$$u_{N^2} = \frac{1}{u_{N^2-1}} + \frac{1}{u_{N^2-2}} + \ldots + \frac{1}{u_0} + u_0 >$$
$$> \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N}}_{N^2 \text{ раз}} + u_0 > N.$$

Полученное противоречие и показывает, что наше исходное предположение о том, что числа u_k в совокупности ограничены, было ошибочным.

Таким образом, мы можем утверждать, что прямоугольники P и P' (см. рис. 53) могут быть сделаны *сколь угодно «тонкими»*. Отсюда сразу следует требуемое утверждение. Действительно, начнем с какого-то определенного разбиения квадрата K на попарно неравные квадраты, например с разбиения, определяемого прямоугольником P_0 (с отношением сторон 422 : 593; см. рис. 23 на стр. 28). Пусть теперь a есть сторона *самого маленького* квадрата, участвующего в этом первом разбиении. Выберем номер k настолько большим, чтобы у прямоугольников P и P', подобных прямоугольнику P_k, меньшая сторона была меньше a. Ясно, что ни один квадрат полученного таким образом разбиения квадрата K не может быть равен квадрату из первого разбиения. Действительно, квадраты, на которые будут разбиваться прямоугольники P

и P', будут меньше самого маленького квадрата первого разбиения (ибо стороны этих квадратов заведомо будут меньше α), а квадраты K_1 и K_2 тоже не будут равны квадратам первого разбиения; один из этих двух квадратов будет меньше самого маленького квадрата первого разбиения, а второй — больше самого большого.

Далее, точно так же, обозначив через β сторону самого маленького квадрата второго разбиения квадрата K на попарно неравные квадраты (т. е. разбиения, соответствующего прямоугольнику P_k), построим третье разбиение таким образом, чтобы меньшая сторона прямоугольников P и P', подобных прямоугольнику P_l (где номер l следует выбрать достаточно большим), была меньше β. Очевидно, что, поступая и дальше таким же образом, мы можем найти сколь угодно много различных разбиений квадрата на попарно неравные квадраты, удовлетворяющих условию п. 2°.

Этим завершается доказательство основной теоремы.

Задача 9. Докажите, что параллелепипед П тогда и только тогда можно разбить на (не обязательно попарно различные) кубы, когда отношение любых двух сторон параллелепипеда рационально.

Задача 10. Квадрат разрезан на ряд частей, одна из которых представляет собой прямоугольник P, а остальные — квадраты. Докажите, что стороны прямоугольника P соизмеримы.

§ 4. ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Простые и составные разбиения прямоугольника и квадрата. Как мы уже отмечали, намеченная в § 2 методика, явившаяся основой большинства успехов в рассматриваемой здесь области, по существу, почти не использует условия о том, что все квадраты разбиения являются различными: при составлении таблицы, приведенной на стр. 50, мы лишь исключили из рассмотрения графы, отвечающие таким разбиениям, которые содержат пары равных квадратов, примыкающих один к другому по целой стороне. Тем самым мы отбросили некоторые «простейшие» разбиения прямоугольника или квадрата на квадраты; однако, помимо таких разбиений, существуют многочисленные иные разбиения, содержащие равные квадраты.

К. Я. Баукампом [15] были перечислены все разбиения прямоугольников на $n < 14$ квадратов, *не содержащие пар равных квадратов, примыкающих друг* *к другу по целой стороне.* Естественное обобщение условия о том, что никакие два равных квадрата разбиения не должны примыкать друг к другу по целой стороне, состоит в том, что *никакая* (с о б с т в е н н а я, т. е. отличная от всех квадратов) *часть квадратов разбиения не должна заполнять прямоугольник.* Разбиения прямоугольника или квадрата на меньшие квадраты, удовлетворяющие этому последнему условию, иногда называют *простыми*; разбиения противоположного типа называют *составными*.

Легко видеть, что изображенные на рис. 14 (стр. 21) и 16 (стр. 23) разбиения прямоугольника на 9 неповторяющихся квадратов являются простыми; также просты изображенные на рис. 19; 20; 21, *а*, *б*; 22, *а*, *б*; 24 а и 24 б разбиения прямоугольника на 10, 12 и 13 квадратов. В противоположность этому разбиения прямоугольника на любое целое число $n \geqslant 10$ неповторяющихся квадратов, описанные на стр. 24 (см. рис 17 и 18), являются составными. Составными являются также все указанные ранее разбиения квадрата на попарно неравные квадраты (см. рис. 23, 25, 26 и текст, напечатанный в конце § 1 мелким шрифтом); например, разбиение квадрата $ABCD$ на 24 квадрата, изображенное на рис. 26, является составным, поскольку здесь в левом верхнем углу имеется прямоугольник $DEFG$ со сторонами 94 и 111, разбитый на 13 квадратов. Ясно, что отыскание составных разбиений прямоугольников сводится к задаче о разбиениях прямоугольников и иных (невыпуклых!) многоугольников с углами в 90° и 270° на квадраты: так, например, разбиение квадрата на 28 попарно неравных квадратов легко получается из двух разбиений прямоугольника на 13 квадратов (см. рис. 22, *а*, *б* и 23), а разбиение квадрата на 24 попарно неравных квадрата (рис. 26) сводится к уже упоминавшемуся разбиению прямоугольника $DEFG$ со сторонами 94 и 111 на 13 квадратов и разбиению изображенного на рис. 54 невыпуклого

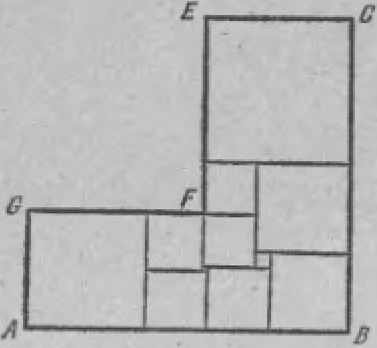


Рис. 54.

шестиугольника $ABCEFG$ (получающегося, если отрезать от квадрата $ABCD$ прямоугольник $DEFG$) на 11 попарно различных квадратов.

По подсчетам К. Я. Бауkaмпа [15], [16] общее число различных разбиений прямоугольника на $n<14$ попарно различных квадратов таково:

Число квадратов	9	10	11	12	13	Всего
Число разбиений	2	10	38	127	408	585

Впрочем далеко не все эти разбиения являются простыми — так, согласно тому же Баукампу число простых разбиений прямоугольника на $n<14$ попарно неравных квадратов дается следующей таблицей:

Число квадратов	9	10	11	12	13	Всего
Число простых разбиений	2	6	22	67	213	310

Однако Баукамп обнаружил, что имеется довольно много *простых разбиений прямоугольников на $n<14$ квадратов, некоторые из которых равны между собой*:

Число квадратов	9	10	11	12	13	Всего
Число простых разбиений на повторяющиеся квадраты	1	—	—	9	34	44

Таким образом, всего Баукампом было перечислено $310+44=354$ простых разбиений прямоугольников на $n<14$ квадратов.

Тот факт, что не существует простых разбиений прямоугольника на $n<9$ квадратов, вытекает из рассуждений § 1 (проверьте это!). Методами, которыми мы пользовались в этом параграфе (или используя развитый в § 2 аппарат), нетрудно убедиться также, что существует единственное простое разбиение прямоугольника на 9 квадратов, среди которых имеются и одинаковые,— это разбиение прямоугольника со сторонами 11 и 15 на квадраты со сторонами 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, изображенное на рис. 55. Среди перечисленных Баукампом 354-х простых разбиений прямоугольников на $n<14$ квадратов имеется единственное разбиение квадрата (на 13 меньших квадратов); это разбиение изображено на рис. 56. Таким образом, было установлено, что *невозможно простое разбиение квадрата на*

$n < 13$ *меньших квадратов* и что *имеется* ***единственное*** *простое разбиение квадрата на* 13 *квадратов*, а

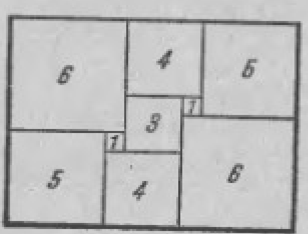


Рис. 55

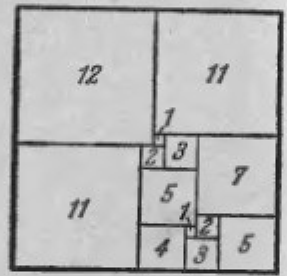


Рис. 56.

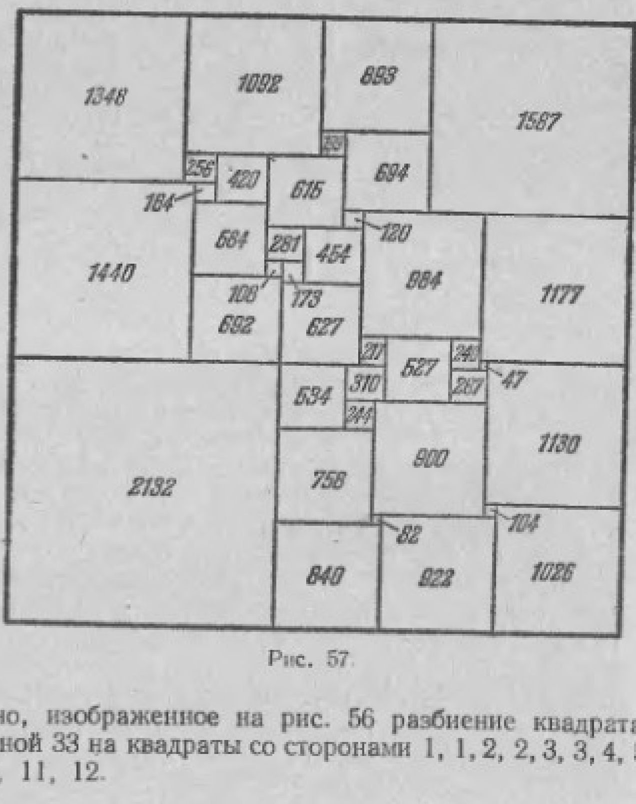


Рис. 57

именно, изображенное на рис. 56 разбиение квадрата со стороной 33 на квадраты со сторонами 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 7, 11, 11, 12.

После этого, естественно, встал вопрос о существовании *простого разбиения квадрата на неповторяющиеся квадраты.* Эта задача была поставлена в большой статье Р. Л. Брукса, К. А. Б. Смита, А. Г. Стона и У. Т. Татти [13], где было намечено построение подобного разбиения. Однако К. Я. Баукамп [15] нашел пробелы в рекомендованной английскими математиками методике; он сам несколько ее усовершенствовал и указал [16] *простое разбиение квадрата на 55 различных квадратов.* Иное разбиение того же типа (и тоже на 55 квадратов!) было указано одновременно Р. Л. Бруксом, К. А. Б. Смитом, А. Г. Стоном и У. Т. Татти [17], частично согласившимися с критикой Баукампа. Исправлению дефектов, найденных Баукампом в статье [13], была посвящена статья К. Б. Смита и У. Т. Татти [19], в которой, в частности, были указаны два различных разбиения прямоугольника со сторонами 115 407 650 и 160 618 071 (!) на неповторяющиеся квадраты с целочисленными сторонами. Продолжением статьи К. Б. Смита и У. Т. Татти [19] является помещенная в том же журнале статья У. Т. Татти [20], в которой указано найденное Бруксом *простое разбиение квадрата на 38 неповторяющихся квадратов* (рис. 57). *До сих пор неизвестно, существуют ли простые разбиения квадрата на попарно различные квадраты, число которых меньше* 38 (см. задачу 16) на стр. 105).

Задача 11. Докажите, что все простые разбиения прямоугольника на 9 квадратов исчерпываются разбиениями, изображенными на рис. 14, 16 и 55.

Задача 12. Изобразите графы (или электрические цепи), отвечающие разбиениям прямоугольника и квадрата, изображенным на рис. 55 и 56, а также двойственные им графы (электрические цепи).

2. Разбиения прямоугольников на квадраты и числа Фибоначчи. В § 1 был указан способ (заведомого составного!) разбиения прямоугольника на любое число $n \geqslant 10$ неповторяющихся квадратов (см. рис. 17 и 18 на стр. 24). Предложенную там конструкцию можно использовать для очень простого построения такой бесконечной последовательности $R_1, R_2, R_3, \ldots$ прямоугольников, что прямоугольник R_n состоит из n «почти неповторяющихся» квадратов (причем это разбиение прямоугольника R_n, где $n>1$, тоже будет заведомо составным); здесь выражение «почти неповторяющихся» означает, что первые два квадрата, с которых начинается предлагаемая конструкция, одинаковы, но все последующие уже отличны от этих двух квадратов и друг от друга. Соответствующее построение изображено на рис. 58, *а*, *б*; из него видно, что если обозначить сторону n-го из использованных в построении квадратов через F_n, то числа $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$ будут связаны следующим соотношением:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n = 3, 4, 5, \ldots).$$

Поэтому если принять стороны F_1 и F_2 первых двух равных

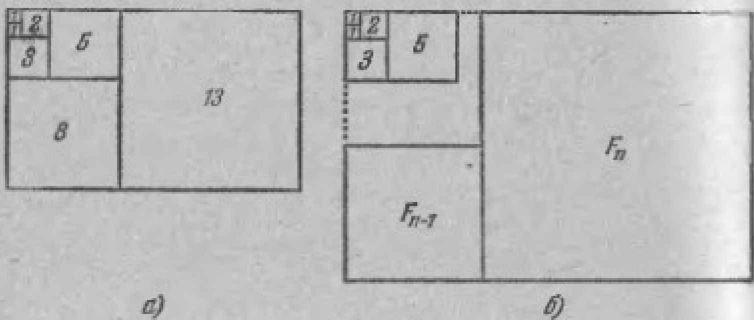


Рис. 58.

квадратов за единицу длины, то ряд чисел F_n ($n=1, 2, 3, \ldots$) будет иметь вид

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots$$

Эта последовательность чисел называется последовательностью чисел Фибоначчи [1]).

Ясно, что стороны прямоугольника R_n, составленного из n квадратов, равны F_n и $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ (см. рис. 58,*б*) [2]); поэтому площадь его равна $F_n F_{n+1}$. А так как площадь прямоугольника R_n равна сумме площадей n квад-

[1]) См., например, Н. Н. Воробьев, Числа Фибоначчи, «Наука», 1964 (готовится к печати новое издание).

[2]) Из известных свойств чисел Фибоначчи следует, что прямоугольники R_n с ростом n становятся все более похожими по форме один на другой и на прямоугольник R, бо́льшая сторона которого в $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803398\ldots$ раз больше меньшей стороны (ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$).

ратов, на которые он разбивается, то мы приходим к геометрической интерпретации следующего известного соотношения между числами ряда Фибоначчи:

$$F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_nF_{n+1}. \qquad (F)$$

Последнее соотношение можно получить еще и по-другому. На рис. 59 изображена разветвленная электрическая цепь, отвечающая рассматриваемому разбиению прямоугольника R_n на n квадратов (рис. 58, *б*; здесь мы считаем, что число n нечетно). Так как каждый из проводников, изображенных на рис. 59, имеет единичное сопротивление, то напряжение такого проводника (разность потенциалов на его концах) равно силе текущего по нему тока. Таким образом, сила тока i_k и напряжение u_k k-го проводника (отвечающего k-му квадрату разбиения, изображенного на рис. 58, *б*) равны k-му числу Фибоначчи F_k; поэтому мощность $w_k=i_ku_k$ тока в этом проводнике будет равна F_k^2. С другой стороны, сила I всего текущего по разветвленной цепи тока (сила тока, поступающего на клемму B, — рис. 59) равна $F_{n-1}+F_n=F_{n+1}$, а напряжение U в цепи (разность потенциалов в точках A и B) — n-му числу Фибоначчи F_n; поэтому мощность $W=IU$ тока в цепи равна F_nF_{n+1}. Отсюда без труда снова получаем

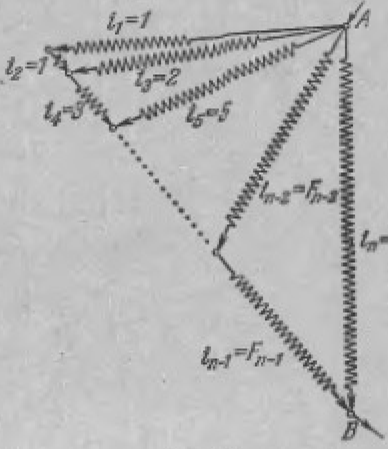


Рис. 59.

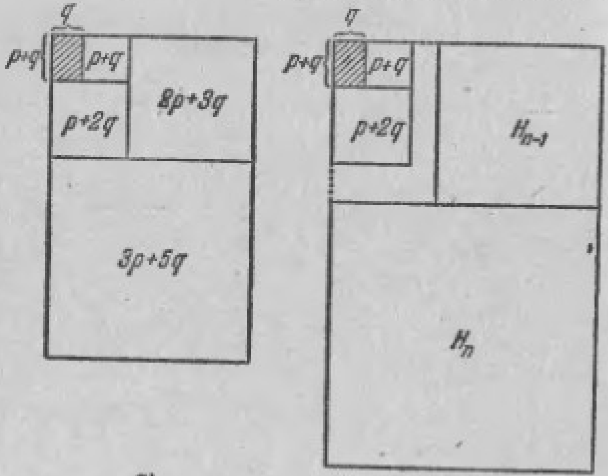
$$F_nF_{n+1}=F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2$$

(ибо, очевидно, $W=w_1+w_2+\ldots+w_n$).

Рис. 58 воспроизводит конструкцию рис. 18 в предположении, что прямоугольник, с которого мы начинаем построение, состоит из двух равных квадратов. Однако это построение можно начинать с произвольного прямоугольника S со сторонами q и $p+q$. Обозначим сторону $(n-1)$-го из использованных квадратов через H_n; тогда, очевидно, и здесь (см. рис. 60, *а*, *б*)

$$H_n=H_{n-1}+H_{n-2}, \qquad n=4,\ 5,\ 6,\ldots$$

Если мы условимся еще обозначать $H_0=p$ и $H_1=q$, то придем к обобщенной последовательности Фибоначчи, конструируемой по тому же «рекуррентному» закону — *каждое число последовательности равно сумме двух предыдущих*,— что и обыкновенные числа Фибоначчи, с той лишь разницей, что последовательность эта



а) б)

Рис. 60.

начинается не с чисел $F_1=1$, $F_2=1$, а с чисел $H_0=p$, $H_1=q$ [1]). Несколько первых членов этой последовательности таковы:

$$p,\ q,\ p+q,\ p+2q,\ 2p+3q,\ 3p+5q,\ 5p+8q,\ 8p+13q,\ \ldots,$$

откуда легко усматривается общий закон образования членов этой последовательности [2]):

$$H_n=F_{n-1}\cdot p+F_n\cdot q, \qquad n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

В самом деле, если $H_{n-1}=F_{n-2}p+F_{n-1}q$ и $H_n=F_{n-1}p+F_nq$, то

$$H_{n+1}=H_n+H_{n-1}=(F_{n-1}p+F_nq)+(F_{n-2}p+F_{n-1}q)=$$
$$=(F_{n-1}+F_{n-2})\,p+(F_n+F_{n-1})\,q=F_np+F_{n+1}q.$$

Заметим теперь, что прямоугольник S_n, заполненный исходным прямоугольником S и $n-1$ квадратами, имеет стороны H_n и $H_{n-1}+H_n=$

[1]) Ср. А. И. Маркушевич, Возвратные последовательности, Гостехиздат, 1950.

[2]) Можно даже считать, что эта формула справедлива и при $n=1$ (в таком случае придется положить $F_0=0$).

Из доказанной формулы следует, что при возрастании n прямоугольники S_n становятся по форме все более похожими один на другой и на

$=H_{n+1}$ (см. рис. 60, *б*). А так как площадь прямоугольника S_n равна сумме площадей прямоугольника S и $n-1$ квадратов, то получаем

$$q(p+q)+H_2^2+H_3^2+\ldots+H_n^2=H_nH_{n+1},$$

или, поскольку $q(p+q)=pq+q^2=H_0H_1+H_1^2$,

$$H_1^2+H_2^2+H_3^2+\ldots+H_n^2=H_nH_{n+1}-H_0H_1. \qquad \text{(H)}$$

Относительно дальнейших построений подобного рода см. работы С. Л. Безина [26] и [27].

Задача 13. Постройте электрическую цепь, двойственную (в смысле § 2) цепи рис. 59.

Задача 14. Покажите, что соотношение (H) равносильно соотношению (F) и соотношению

$$F_1F_2+F_2F_3+\ldots+F_{n-1}F_n=\frac{F_{n-1}F_{n+1}+F_n^2-1}{2}.$$

3. Оценки для числа квадратов, на которые может быть разбит данный прямоугольник. После того как было доказано, что каждый прямоугольник с соизмеримыми сторонами может быть разбит на неповторяющиеся квадраты, естественно, встал вопрос о том, какое наименьшее возможное число квадратов будет участвовать в этом разбиении. Однако задача точного определения такого числа $K(m, n)$, что прямоугольник $P(m, n)$ с длинами сторон m и n (m и n — взаимно простые целые положительные числа) может быть разбит на $K(m, n)$ попарно различных квадратов и не может быть разбит на меньшее число неповторяющихся квадратов, представляется достаточно безнадежной: выше отмечалось, что мы пока не знаем точно даже числа $K(1,1)$ [1]). Поэтому имеет смысл говорить лишь о задаче оценки числа $K(m, n)$.

прямоугольник Σ, отношение сторон которого равно $[2p+(\sqrt{5}+1)q]:[(\sqrt{5}-1)p+2q]$ (ибо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H_{n+1}}{H_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_np+F_{n+1}q}{F_{n-1}p+F_nq}=\lim_{n\to\infty}\frac{p+\frac{F_{n+1}}{F_n}q}{\frac{F_{n-1}}{F_n}p+q}=\frac{p+\frac{\sqrt{5}+1}{2}q}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}p+q}=$$

$$=\frac{2p+(\sqrt{5}+1)q}{(\sqrt{5}-1)p+2q}\Bigg).$$

[1]) Известно лишь, что $13<K(1,1)\leqslant 24$ (см. выше, стр. 28—30). [Конечно, здесь имеется в виду, что разбиение отлично от тривиального «разбиения», при котором единственным квадратом разбиения является сам исходный квадрат — иначе пришлось бы считать, что $K(1,1)=1$.]

Заметим, что процедура, использованная в § 3 для доказательства основной теоремы, дает для числа $K(m, n)$ весьма большое значение, которое даже трудно оценить. В самом деле, там мы исходили из существования последовательности различных «разбиений» квадрата на неповторяющиеся квадраты; если первым из них считать тривиальное «разбиение» («разбиение» квадрата на один квадрат), то i-е разбиение из этого ряда расчленяет квадрат на $2^{i-1}\cdot 13+2$ частей (ср. с подстрочным примечанием на стр. 65). Мало того, что ряд чисел

$$1,\ 2\cdot 13+2=28,\quad 2^2\cdot 13+2=54,\quad 2^3\cdot 13+2=106,\quad 2^4\cdot 13+2=210,\ \ldots,\ 2^k\cdot 13+2,\ \ldots$$

растет очень быстро,— при разбиении прямоугольника P, состоящего из $N=mn$ равных квадратов, мы использовали вовсе не 1-е, 2-е, ..., N-е из рассмотренных разбиений квадрата,

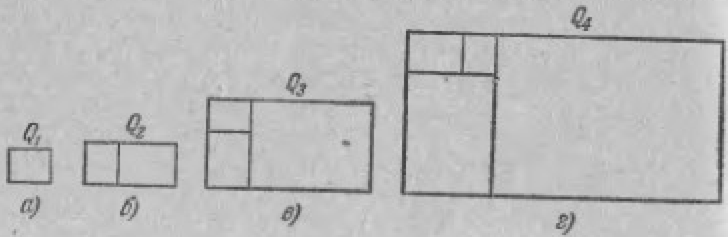


Рис. 61.

а какую-то гораздо более сложную последовательность этих разбиений. Однако существует видоизмененный вариант описанной в § 3 процедуры, гораздо более удобный для оценки числа $K(m, n)$.

Заменим рассмотренную в § 3 последовательность прямоугольников P_i сходной последовательностью прямоугольников Q_i, получаемой следующим образом. Через Q_1 обозначим прямоугольник P_0 со сторонами 1 и $\frac{593}{422}$ (рис. 61, a), который, как мы знаем, может быть двумя способами разбит на 13 неповторяющихся квадратов. Прямоугольник Q_2 мы получим из Q_1 присоединением к нему такого прямоугольника, подобного прямоугольнику Q_1, что его меньшая сторона равна большей стороне прямоугольника Q_1 (рис. 61, $б$); прямоугольник Q_3 получим из Q_2 присоединением к нему такого прямоугольника, подобного прямоугольнику Q_1, что его меньшая сторона равна большей стороне прямоугольника Q_2 (рис. 61, *в*); аналогично получим прямоугольник Q_4 из Q_3 (рис. 61, *г*) и т. д. При этом, как легко видеть, прямоугольник Q_i будет состоять из i прямоугольников, подобных прямоугольнику Q_1 (или P_0).

Так как каждый из прямоугольников, подобных Q_1, можно — и притом даже двумя разными способами — разбить на неповторяющиеся квадраты, то мы приходим к двум способам разбиения на квадраты каждого из прямоугольников Q_i (ср. выше, стр. 59—60). При этом и здесь, подобно тому как это было в случае конструкции § 3, оказывается, что *ни один из квадратов, участвующих в одном из двух разбиений прямоугольника Q_i, не встречается больше в том же самом или в другом разбиении того же прямоугольника.* Поэтому если разбить некоторый квадрат K (разделив его стороны в отношении сторон прямоугольника Q_i) на два меньших квадрата K_1 и K_2 и на два прямоугольника Q и Q', подобных прямоугольнику Q_i (рис. 62), а затем разбить на квадраты каждый из i прямоугольников (подобных Q_1), составляющих прямоугольник Q, в соответствии с рис. 22, *а*, а каждый из i прямоугольников, составляющих прямоугольник Q',— в соответствии с рис. 22, *б*, то весь квадрат K разобьется на н е п о в т о р я ю щ и е с я квадраты. Ясно, что число этих квадратов будет равно $2i \cdot 13+2$, ибо каждый из $2i$ прямоугольников (подобных Q_1), из которых состоят прямоугольники Q и Q', разбивается как первым, так и вторым способом на 13 квадратов. Более того, можно также показать, что *среди $26i+2$ квадратов, на которые разобьется при этом квадрат K, не будет ни одного, равного какому-либо* из *$26j+2$ квадратов, на которые разбился бы квадрат K, если бы мы исходили из прямоугольника Q_j, где $j \neq i$.*

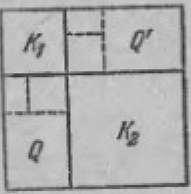


Рис. 62.

Вернемся теперь к прямоугольнику $P(m, n)$ с длинами сторон m и n. Этот прямоугольник можно разбить на mn равных квадратов. Один из этих квадратов мы оставим без изменения, а $mn-1$ остальных разобьем на части описанным выше способом, причем при разбиении 1-го из них используем прямоугольник Q_1, при разбиении 2-го — прямоугольник Q_2, при разбиении 3-го — прямоугольник Q_3 и т. д. При этом 1-й из разбиваемых квадратов распадется на $26+2=28$ квадратов (см. выше рис. 23); 2-й — на $26 \cdot 2+2=$

$=54$ квадрата; 3-й — на $26\cdot 3+2=80$ квадратов и т. д. Таким образом, весь *прямоугольник* $P(m, n)$ *распадется на*

$$1+(26\cdot 1+2)+(26\cdot 2+2)+(26\cdot 3+2)+\ldots$$
$$\ldots+[26\cdot(mn-1)+2]=$$
$$=1+26[1+2+3+\ldots+(mn-1)]+2(mn-1)=$$
$$=1+26\cdot\frac{mn(mn-1)}{2}+2(mn-1)=13(mn)^2-11mn-1$$

неповторяющихся квадратов; поэтому

$$K(m, n)\leqslant 13m^2n^2-11mn-1$$

(см. Р. Шпраг [14], где, впрочем, получена несколько худшая оценка для величины $K(m, n)$). Однако эта оценка для числа $K(m, n)$ явно является достаточно грубой; так, например, исходя из нее, мы получаем лишь, что

$$K(33, 32)\leqslant 13\cdot 33^2\cdot 32^2-11\cdot 33\cdot 32-1=14\,485\,151,$$

в то время как, на самом деле,

$$K(33, 32)=9$$

(см. стр. 21—22, в частности рис. 14).

Докажем утверждения, выделенные выше курсивом; при этом первое из них устанавливается значительно проще второго.

1°. *Ни один из квадратов, участвующих в одном из двух рассматриваемых разбиений прямоугольника Q_l, не повторяется в том же самом или во втором разбиении этого же прямоугольника.*

Обозначим меньшую сторону прямоугольника Q_l через w_l. Так как стороны прямоугольника Q_1 равны 1 и $\frac{593}{422}$, то, очевидно,

$$w_1=1,\quad w_2=\frac{593}{422},\quad w_3=\left(\frac{593}{422}\right)^2+1=\frac{593^2+422^2}{422^2}$$

и, вообще,

$$w_l=\frac{593}{422}w_{l-1}+w_{l-2}=\frac{p_l}{422^{l-1}},$$

где числители $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_l, \ldots$ дробей $w_1, w_2, \ldots, w_l, \ldots$ (это суть целые числа, несократимые со знаменателями) определяются следующим образом:

$$p_1=1,\ p_2=593,\ p_3=593^2+422^2,\ \ldots,\ p_l=593p_{l-1}+422^2p_{l-2},\ \ldots$$

Рассмотрим теперь прямоугольник Q_l. Он состоит из l прямоугольников (подобных Q_1), меньшие стороны которых равны

$$w_1=1,\quad w_2=\frac{593}{422},\quad w_3,\ \ldots,\ w_l.$$

Пусть x — сторона какого-то квадрата в разбиении одного из этих l

прямоугольников (с меньшей стороной w_k, $k \leqslant i$) на 13 попарно различных квадратов и c — сторона соответствующего квадрата в одном из двух разбиений прямоугольника (с меньшей стороной 422), изображенных на рис. 22, *а,б*. Тогда

$$x = \frac{w_k}{422} c = \frac{p_k}{422^k} c.$$

Пусть теперь y—сторона какого-то другого квадрата в том же или в другом разбиении одного из рассматриваемых i прямоугольников (с меньшей стороной w_l, где $l \leqslant i$) на 13 попарно различных квадратов, а d — сторона соответствующего квадрата в одном из двух разбиений прямоугольника (с меньшей стороной 422), изображенных на рис. 22, *а*, *б*, т. е.

$$y = \frac{p_l}{422^l} d.$$

Предположим, что $x = y$, т. е.

$$\frac{p_k}{422^k} c = \frac{p_l}{422^l} d$$

или

$$\frac{c}{d} = \frac{422^{k-l} p_l}{p_k}$$

(считаем для определенности, что $k \geqslant l$).

Но c и d—это какие-то из выписанных на стр. 27 двадцати шести чисел (I) и (II). Заметим теперь, что отношение любых двух из этих чисел не равно несократимой дроби, числитель которой делится на 422. Следовательно, $k = l$ (так как p_k взаимно просто с 422); но тогда $c = d$. Итак, квадраты со сторонами x и y входят в состав о д н о г о и т о г о ж е прямоугольника (хотя, быть может, принадлежат двум различным разбиениям этого прямоугольника) из рассматриваемых i прямоугольников, подобных прямоугольнику Q_1 и составляющих прямоугольник Q_i. Но так как по предположению два рассматриваемых квадрата — это не один и тот же квадрат, то им не может соответствовать одно и то же число $c = d$ из набора двадцати шести чисел (I) и (II) (стр. 27), так как среди этих чисел нет совпадающих. Следовательно, предположение $x = y$ неверно.

Таким образом, мы убедились, что $26i$ квадратов, участвующих в двух разбиениях одного какого-то прямоугольника Q_i, попарно различны. Поэтому, разбив квадрат K на два квадрата K_1 и K_2 и на два прямоугольника Q и Q', подобных Q_i (рис. 62), и разбив затем прямоугольники Q и Q' двумя способами на $13i$ квадратов каждый, мы разобьем K на $26i+2$ н е п о в т о р я ю щ и х с я квадратов [1].

---

[1]) Здесь учитывается, что ни один из прямоугольников Q_i не является квадратом (ниже будет показано, что отношение большей стороны любого такого прямоугольника к меньшей стороне не меньше 593 : 422, т. е. больше 1), так что квадраты K_1 и K_2 (рис. 62) различны. Далее, ни один из квадратов, на которые разбиваются прямоугольники Q и Q', не может быть равен K_1 или K_2, так как мы исходили из таких разбиений прямоугольника Q_1, в которых ни один из квадратов разбиения не имеет своей стороной меньшую сторону этого прямоугольника.

2°. Итак, квадрат K можно **бесконечным** числом способов разбить на неповторяющиеся квадраты; для этого достаточно расчленить его на два квадрата K_1 и K_2 и на два прямоугольника Q и Q' (рис. 62), подобные какому-то прямоугольнику Q_i (где i может быть равно 1, 2, 3,...), и затем разрезать каждый из прямоугольников Q и Q' на 13*i* попарно неравных квадратов различными способами.

Рассмотрим два произвольных целых числа i и j ($i \neq j$) и два разбиения квадрата K, соответствующие этим числам. Пусть, квадраты K_1 и K_2 и прямоугольники Q и Q' (рис. 62) отвечают первому из этих разбиений, т. е. Q и Q' подобны Q_i. Для второго разбиения соответствующие квадраты обозначим через $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$, а прямоугольники, подобные Q_j,— через $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$. Покажем, что *ни один из $26i+2$ квадратов, участвующих в первом разбиении квадрата K, не совпадает ни с одним из $26j+2$ квадратов, участвующих во втором разбиении* ($i \neq j$).

Доказательство этого последнего утверждения мы расчленим на три этапа.

А. Покажем, что *ни один из квадратов K_1 и K_2 не равен ни одному из квадратов $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$.*

Пусть K_1 — меньший из двух квадратов K_1 и K_2; $\overline{K}_1$ — меньший из квадратов $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$. Равенство квадратов K_1 и $\overline{K}_1$ (а значит, и квадратов K_2 и $\overline{K}_2$) могло бы иметь место лишь в том случае, если бы прямоугольники Q и Q' были равны прямоугольникам $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$, т. е. если бы прямоугольники Q_i и Q_j были подобны. Но отношение большей стороны прямоугольника Q_i к меньшей стороне равно

$$\frac{w_{i+1}}{w_i}$$

(ведь большая сторона прямоугольника Q_i — это одновременно меньшая сторона следующего прямоугольника Q_{i+1}), т. е. равно

$$\frac{p_{i+1}}{422p_i}.$$

Последняя дробь несократима: в самом деле, все числа p_k, как мы уже знаем, взаимно просты с 422; далее, из того, что взаимно просты числа $p_1 = 1$ и $p_2 = 593$, следует, что взаимно просты числа p_2 и $p_3 = 593p_2 + 422^2p_1$; из того, что взаимно просты числа p_2 и p_3, следует, что взаимно просты числа p_3 и $p_4 = 593p_3 + 422^2p_2$,— и так последовательно устанавливается, что взаимно просты любые два **соседние** числа числа p_i и p_{i+1} из нашего ряда целых чисел $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$. Поэтому равенство

$$\frac{p_{i+1}}{422p_i} = \frac{p_{j+1}}{422p_j}$$

означает, что $p_i = p_j$ и $p_{i+1} = p_{j+1}$; но при $i \neq j$ это невозможно, ибо из формулы $p_k = 593p_{k-1} + 422^2p_{k-2}$, $k = 3, 4, 5, \ldots$, видно, что числа последовательности $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_i, \ldots$ монотонно возрастают.

Б. Докажем, что *ни один из квадратов, входящих в разбиения прямоугольников Q и Q', не равен ни одному из квадратов $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$* (и аналогично — ни один из квадратов, входящих в разбиения прямоугольников $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$, не равен ни одному из квадратов K_1 и K_2). Точнее, докажем, что *меньшая сторона прямоугольников $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$ (т. е. сторона меньшего из двух квадратов K_1 и K_2) больше стороны наибольшего из квадратов, на которые разбиваются прямоугольники $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$.*

Пусть сторона квадрата K равна 1; в таком случае равен 1 п о л у п е р и м е т р прямоугольников Q и Q', $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$. А так как отношение длины большей стороны прямоугольника Q_i к длине его меньшей стороны равно, как мы знаем, w_{i+1}/w_i, то меньшие стороны прямоугольников Q и Q', подобных Q_i, равны

$$e=\frac{w_i}{w_i+w_{i+1}}=\frac{1}{1+\frac{w_{i+1}}{w_i}}.$$

Оценим эту величину.

В силу закона образования чисел w_1, w_2, $w_3, \ldots$

$$\frac{w_{i+1}}{w_i}=\frac{\frac{593}{422}w_i+w_{i-1}}{w_i}=\frac{593}{422}+\frac{w_{i-1}}{w_i}\geqslant\frac{593}{422}$$

и (поскольку также $w_i/w_{i-1}\geqslant 593/422$, т.е. $w_{i-1}/w_i\leqslant 422/593$)

$$\frac{w_{i+1}}{w_i}=\frac{593}{422}+\frac{w_{i-1}}{w_i}\leqslant\frac{593}{422}+\frac{422}{593}=\frac{593^2+422^2}{422\cdot 593}=\frac{529\,733}{250\,246}.$$

Таким образом, имеем

$$e=\frac{1}{1+\frac{w_{i+1}}{w_i}}\geqslant\frac{1}{1+\frac{529\,733}{250\,246}}=\frac{250\,246}{779\,979}.$$

С другой стороны, меньшая сторона $\bar{e}$ прямоугольников $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$, подобных Q_j, может быть оценена так:

$$\bar{e}=\frac{1}{1+\frac{w_{j+1}}{w_j}}\leqslant\frac{1}{1+\frac{593}{422}}=\frac{422}{1015}.$$

А так как наибольший из двадцати шести квадратов, изображенных на рис. 22, *а*, *б*, имеет сторону 247, причем бо́льшая сторона разбиваемого прямоугольника равна 593, в то время как бо́льшая сторона самого большого из прямоугольников, подобных прямоугольнику Q_j и входящих в состав прямоугольников $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$, равна $\bar{e}$, то сторона f наибольшего из квадратов, входящих в разбиение прямоугольников $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$, равна

$$f=247\cdot\frac{\bar{e}}{593},$$

и, значит,

$$f\leqslant 247\cdot\frac{422/1015}{593}=\frac{247\cdot 422}{593\cdot 1015}=\frac{104\,234}{601\,895}.$$

Таким образом,

$$e \geqslant \frac{250\,246}{779\,979} > \frac{104\,234}{601\,895} \geqslant f$$

(ибо $\frac{250\,246}{779\,979} > \frac{1}{4}$, а $\frac{104\,234}{601\,895} < \frac{1}{5}$), что и требовалось доказать.

В. Наконец, докажем, что *ни один из квадратов, входящих в разбиения прямоугольников Q и Q', не равен ни одному из квадратов, входящих в разбиения прямоугольников $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$* (этот пункт доказательства является самым сложным).

Прямоугольники Q и Q' подобны прямоугольнику Q_i, составленному из i подобных Q_1 прямоугольников, меньшие стороны которых равны $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{593}{422}$, w_3, w_4, ..., w_i; однако, в то время как полупериметр прямоугольника Q_i равен $w_i + w_{i+1}$, полупериметры прямоугольников Q и Q' равны 1 (здесь мы по-прежнему считаем, что сторона квадрата K равна 1). Поэтому длину x стороны одного из квадратов, на которые распадаются прямоугольники Q и Q', можно записать в виде

$$x = c \cdot w_r \cdot \frac{1}{w_i + w_{i+1}},$$

где $r \leqslant i$, а c — одно из выписанных на стр. 27 двадцати шести чисел (I) и (II). Аналогично этому, длину y стороны одного из квадратов, на которые распадаются прямоугольники $\overline{Q}$ и $\overline{Q}'$, можно записать так:

$$y = d \cdot w_s \cdot \frac{1}{w_j + w_{j+1}},$$

где $s \leqslant j$, а d — снова одно из двадцати шести чисел (I) и (II). Нам надо доказать, что при $j \neq i$ (далее мы будем считать число i б*о́*льшим из пары чисел i, j, т. е. положим $i > j$)[1]

$$x \neq y.$$

Воспользовавшись равенством $w_k = \frac{p_k}{422^{k-1}}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ (стр. 78), получаем

$$x = c \cdot \frac{p_r}{422^{r-1}} \cdot \frac{1}{\frac{p_i}{422^{i-1}} + \frac{p_{i+1}}{422^i}} = 422^{i-r+1} c \frac{p_r}{p_{i+1} + 422 p_i}$$

и

$$y = d \cdot \frac{p_s}{422^{s-1}} \cdot \frac{1}{\frac{p_j}{422^{j-1}} + \frac{p_{j+1}}{422^j}} = 422^{j-s+1} d \frac{p_s}{p_{j+1} + 422 p_j}.$$

---

[1] Случай $i = j$ исчерпан п. 1° доказательства.

Таким образом, если $x=y$ (а нам надо доказать, что последнее равенство места не имеет!), то

$$422^{i-r+1} c \frac{p_r}{p_{i+1}+422p_i} = 422^{j-s+1} d \frac{p_s}{p_{j+1}+422p_j},$$

или

$$\frac{c}{d} = 422^{j-i+r-s} \frac{(p_{i+1}+422p_i)\, p_s}{(p_{j+1}+422p_j)\, p_r}.$$

Условимся обозначать

$$p_{k+1}+422p_k = P_k, \qquad k=1, 2, 3, \ldots;$$

тогда

$$\frac{c}{d} = 422^{j-i+r-s} \frac{P_i p_s}{P_j p_r},$$

где $i>j$, $i\geqslant r$, $j\geqslant s$. Но из того, что все числа p_k — а следовательно, и все числа $P_k = 422p_k + p_{k+1}$ — взаимно просты с 422, и из того, что ни числитель, ни знаменатель несократимой дроби c/d не кратен 422 (на стр.79 мы уже один раз использовали аналогичное обстоятельство), следует, что

$$j-i+r-s=0 \quad \text{и, значит,} \quad j-s=i-r.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{c}{d} = \frac{P_i p_s}{P_j p_r}, \qquad (*)$$

где $i>j$, $i\geqslant r$ и $j-s=i-r$.

Дробь, стоящая в правой части равенства (*), может оказаться и сократимой. В таком случае произведем все возможные сокращения; при этом все равно в числителе дроби останется число, кратное отношению $\dfrac{P_i}{(P_i, P_j)(P_i, p_r)}$, где (P_i, P_j) и (P_i, p_r) — наибольшие общие делители чисел P_i, и P_j, соответственно P_i и p_r. Нам понадобится оценка отношения $\dfrac{P_i}{(P_i, P_j)(P_i, p_r)}$; поэтому полезно оценить выражения (P_i, P_j) и (P_i, p_r).

Заметим, что обе последовательности чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$ и $P_1, P_2, P_3, \ldots$ определяются рекуррентно, т. е. каждый член последовательности выражается через предыдущие ее члены. В самом деле, как мы знаем,

$$p_k = \alpha p_{k-1} + \beta^2 p_{k-2}, \qquad k\geqslant 3,$$

где мы для краткости условимся обозначать $593=\alpha$ и $422=\beta$, и

$$P_k = p_{k+1} + \beta p_k,$$

откуда сразу следует

$$P_k = (\alpha p_k + \beta^2 p_{k-1}) + \beta(\alpha p_{k-1} + \beta^2 p_{k-2}) =$$
$$= \alpha(p_k + \beta p_{k-1}) + \beta^2(p_{k-1} + \beta p_{k-2}) = \alpha P_{k-1} + \beta^2 P_{k-2}, \qquad k\geqslant 3.$$

Таким образом, *обе последовательности чисел* $p_1, p_2, p_3, \ldots$ и $P_1, P_2, P_3, \ldots$ *задаются даже одним и тем же рекуррентным законом*; только

$$p_1=1 \quad \text{и} \quad p_2=\alpha \qquad (=593),$$

в то время как

$$P_1=p_2+\beta p_1=\alpha+\beta \qquad (=593+422)$$

и

$$P_2=p_3+\beta p_2=(\alpha p_2+\beta^2 p_1)+\beta p_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$$

$$(=593^2+422^2+593\cdot 422).$$

Рекуррентный характер последовательностей чисел p_k и P_k подает надежду на возможность «рекуррентного упрощения» выражений (P_i, P_j) и (P_i, p_r), т. е. сведения этих выражений к аналогичным, в которых, однако, номера i и j, соответственно i и r, заменяются меньшими. Выше мы уже имели один пример такого рода: из того, что $p_1=1$ и $p_2=\alpha$ взаимно просты, т. е. $(p_1, p_2)=1$, и из формулы $p_k=\alpha p_{k-1}+\beta^2 p_{k-2}$ мы последовательно вывели, что

$$1=(p_1, p_2)=(p_2, p_3)=(p_3, p_4)=\ldots=(p_k, p_{k+1})$$

(ср. стр. 80). Точно так же из того, что числа $P_1=\alpha+\beta$ и $P_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$ взаимно просты между собой и взаимно просты с числами α и β, и из формулы $P_k=\alpha P_{k-1}+\beta^2 P_{k-2}$ следует, что любые два соседних числа из набора $P_1, P_2, P_3, \ldots$ взаимно просты между собой:

$$1=(P_1, P_2)=(P_2, P_3)=(P_3, P_4)=\ldots=(P_k, P_{k+1}).$$

Кроме того, все эти числа взаимно просты с α и с β и число P_k взаимно просто с числами p_k и p_{k+1} (последнее вытекает из того, что $P_k=\beta p_k+p_{k+1}$ и $1=(p_1, \beta)=(p_2, \beta)=(p_3, \beta)=\ldots=(p_k, \beta)$).

Заметим теперь, что соотношение

$$P_k=\alpha P_{k-1}+\beta^2 P_{k-2}, \qquad k\geqslant 3,$$

можно переписать так:

$$P_k=p_2 P_{k-1}+\beta^2 p_1 P_{k-2}.$$

Отсюда легко вывести, что имеет место следующая (основная для дальнейших рассмотрений) формула:

$$P_k=p_l P_{k-l+1}+\beta^2 p_{l-1} P_{k-l}, \qquad k>l\geqslant 2. \qquad (^{**})$$

В самом деле, при $l=2$ эта формула, как мы только что видели, выполняется; далее, из справедливости ее для какого-то фиксированного l сразу следует и справедливость этой формулы для следующего по величине значения l, ибо соотношение (**) можно переписать так:

$$P_k=p_l(\alpha P_{k-l}+\beta^2 P_{k-l-1})+\beta^2 p_{l-1} P_{k-l}=$$

$$=(\alpha p_l+\beta^2 p_{l-1})P_{k-l}+\beta^2 p_l P_{k-l-1}=p_{l+1}P_{k-l}+\beta^2 p_l P_{k-l-1}.$$

Поэтому равенство (**) выполняется для всех l (где $k>l\geqslant 2$).

Из формулы (**) вытекает искомое свойство величин (P_k, P_{k-l}) (где $k>l$):

$$(P_k, P_{k-l})=(P_k, p_l)=(P_{k-l}, p_l). \qquad (\mathrm{I})$$

В самом деле, при $l=1$ все три члена равенств (I) равны 1. Если же $l\geqslant 2$, то мы можем воспользоваться соотношением (**): из этого соотношения следует, что если $(P_k, P_{k-l}) = D$, то на D делятся левая часть (**) и второе слагаемое правой части; поэтому $p_l P_{k-l+1}$ также делится на D, и поскольку $(P_{k-l+1}, P_{k-l}) = 1$, то на D делится p_l. Аналогично этому устанавливается, что если $(P_k, p_l) = D_1$, то на D_1 делится P_{k-l}; далее, очевидно, если $(P_{k-l}, p_l) = D_2$, то на D_2 делится P_k; отсюда и следует справедливость формулы (1).

Рис. 63.

Формула (1) уже доставляет нам искомую возможность упрощения выражений (P_k, P_{k-l}): из нее следует, что всегда $(P_k, P_{k-l}) = (P_{k-l}, p_l)$ и что при $k - l > l$ величину (P_k, P_{k-l}) можно заменить величиной (P_k, p_l). Нам, однако, будет удобно дополнить равенства (1) еще одним родственным им соотношением.

Исключив из равенств

$$p_k = \alpha p_{k-1} + \beta^2 p_{k-2},$$
$$P_{k-1} = p_k + \beta p_{k-1},$$
$$P_{k-2} = p_{k-1} + \beta p_{k-2}$$

(где $k \geq 3$) величины p_{k-1} и p_{k-2}, получим

$$\alpha p_k = (\alpha - \beta) P_{k-1} + \beta^2 P_{k-2}.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$\alpha p_k = q_2 P_{k-1} + \beta^2 q_1 P_{k-2},$$

где

$$q_1 = 1, \quad q_2 = \alpha - \beta \qquad (= 593 - 422 = 171)$$

и

$$q_k = \alpha q_{k-1} + \beta^2 q_{k-2} \quad \text{при} \quad k > 2.$$

А теперь аналогично равенству (**) устанавливается, что при $k > l \geq 2$

$$\alpha p_k = q_l P_{k-l+1} + \beta^2 q_{l-1} P_{k-l}, \tag{***}$$

откуда (подобно тому, как соотношение (1) получалось из (**)) выводится равенство

$$(p_k, P_{k-l}) = (P_{k-l}, q_l), \tag{2}$$

где $k > l$, причем, как легко видеть, равенство (2) верно и при $l = 1$.

Теперь мы можем доказать, что всегда

$$(P_k, P_l) \leq P_{\left[\frac{k}{3}\right]} \quad \text{и} \quad (P_k, p_l) \leq P_{\left[\frac{k}{3}\right]}, \tag{3}$$

где $k \geq 3$, $l \leq k$ и через $\left[\frac{k}{3}\right]$ обозначена ц е л а я ч а с т ь дроби $\frac{k}{3}$. В самом деле, разобьем интервал $(0, k)$ всех возможных (целочисленных) значений l на указанные на рис. 63 части I, II, III, IV и V (III — просто средняя точка этого интервала), где отмеченная светлым кружком точка всегда н е п р и н а д л е ж и т промежутку, оканчивающемуся направленной в эту точку стрелкой. Далее, используя (1) и (2), последовательно получаем

$$(P_k, P_l) = (P_l, p_{k-l}) \leq p_{k-l} < P_{k-l} \quad \text{и} \quad (P_k, p_l) = (p_l, P_{k-l}) \leq P_{k-l},$$

откуда следует, что неравенства (3) справедливы в промежутке I, в котором всегда $k-l \leqslant \left[\frac{k}{3}\right]$;

$$(P_k, P_l) = (P_l, p_{k-l}) = (p_{k-l}, P_{2l-k}) \leqslant P_{2l-k}$$

и

$$(P_k, p_l) = (p_l, P_{k-l}) = (P_{k-l}, q_{2l-k}) \leqslant q_{2l-k} < P_{2l-k},$$

и значит неравенства (3) справедливы также и в промежутке II, где $2l-k \leqslant \left[\frac{k}{3}\right]$;

$$(P_k, P_l) = (P_l, p_{k-l}) = (P_l, p_l) = 1$$

и

$$(P_k, p_l) = (p_l, P_{k-l}) = (p_l, P_l) = 1,$$

т. е. в точке III неравенства (3) также выполняются;

$$(P_k, P_l) = (p_{k-l}, P_l) = (P_l, q_{k-2l}) \leqslant q_{k-2l} < P_{k-2l}$$

и

$$(P_k, p_l) = (P_{k-l}, p_l) = (p_l, P_{k-2l}) \leqslant P_{k-2l},$$

откуда следует справедливость неравенств (3) в промежутке IV, где $k-2l \leqslant \left[\frac{k}{3}\right]$;

$$(P_k, P_l) \leqslant P_l \quad \text{и} \quad (P_k, p_l) \leqslant p_l < P_l,$$

следовательно, неравенства (3) справедливы и в промежутке V, в котором $l \leqslant \left[\frac{k}{3}\right]$. (При $l=k$ неравенства (3) очевидны.)

Вернемся теперь к равенству (*) (стр. 83). Мы считаем, что $i > j$; при этом, если $i=2$, то $j=1$, $s=1$, $r=2$, и поэтому правая часть равенства (*) обращается в

$$\frac{P_2 p_1}{P_1 p_2} = \frac{(593^2+422^2+593\cdot 422)\cdot 1}{(593+422)\cdot 593} \qquad \left(=\frac{979\,979}{601\,895}\right),$$

в то время как никакое из отношений каких-либо двух из 26 чисел (I) и (II) стр. 27 не равно этой дроби. Поэтому $i \geqslant 3$, и мы можем использовать полученные выше оценки.

Таким образом,

$$\frac{P_i}{(P_i, P_j)(P_i, p_r)} \geqslant \frac{P_i}{P_{\left[\frac{i}{3}\right]} P_{\left[\frac{i}{3}\right]}} = \frac{P_i}{\left(P_{\left[\frac{i}{3}\right]}\right)^2};$$

оценим последнюю дробь.

Из рекуррентной формулы $P_k = \alpha P_{k-1} + \beta^2 P_{k-2}$ для чисел P_k следует

$$P_i > \alpha P_{i-1} > \alpha^2 P_{i-2} > \ldots > \alpha^{i-1} P_1 > \alpha^i,$$

т. е.

$$P_i > \alpha^i = 593^i \quad \text{и} \quad \frac{P_i}{P_{i-1}} > \alpha = 593.$$

Далее, из той же формулы заключаем, что

$$\frac{P_l}{P_{l-1}}=\alpha+\frac{\beta^2}{P_{l-1}/P_{l-2}}<\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}=593+\frac{422^2}{593}<894,$$

и, следовательно, обозначив $894=\gamma$, имеем

$$P_l<\gamma P_{l-1}<\gamma^2 P_{l-2}<\ldots<\gamma^{l-1}P_1<\gamma^l=894^l.$$

Обозначим теперь (целое) число $\left[\frac{k}{3}\right]$ через t. В таком случае $k\geqslant 3t$ и

$$\frac{P_l}{\left(P_{\left[\frac{l}{3}\right]}\right)^2}\geqslant\frac{P_{3t}}{P_t^2}>\frac{\alpha^{3t}}{(\gamma^t)^2}=\frac{\alpha^{3t}}{\gamma^{2t}}=\left(\frac{\alpha^3}{\gamma^2}\right)^t=\left(\frac{593^3}{894^2}\right)^t>250^t\geqslant 250.$$

Итак, после всевозможных сокращений в числителе дроби, являющейся правой частью равенства (*), останется множитель $\frac{P_l}{(P_l,P_j)\,(P_l,p_r)}$, больший 250. Но в левой части равенства (*) стоит дробь $\frac{c}{d}$, числитель которой не может быть больше 247 (247 есть наибольшее из выписанных на стр. 27 двадцати шести чисел (I) и(II)). Полученное противоречие и показывает, что равенство (*)—т. е. равенство $x=y$—никогда не имеет места.

Это рассуждение и завершает доказательство.

Нетривиальной, хотя возможно и не совсем безнадежной, представляется задача точной оценки наименьшего числа $k(m,n)$ не обязательно попарно различных квадратов, на которые можно разбить прямоугольник с целочисленными (и взаимно простыми) длинами сторон m и n. Довольно легко видеть, что если рациональное число $\frac{m}{n}>1$ может быть записано в виде следующей конечной цепной дроби:

$$\frac{m}{n}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{\cdot}{\cdot\cdot+\cfrac{1}{q_s},}}}$$

то

$$k(m,n)\leqslant r(m,n)=q_1+q_2+\ldots+q_s.$$

Связанное с алгоритмом Евклида разбиение прямоугольника со сторонами m и n на $r(m,n)=q_1+q_2+\ldots+q_s$

квадратов для случая

$$\frac{m}{n}=\frac{27}{10}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}$$

изображено на рис. 64. Однако оценка $k(m, n) \leqslant r(m, n)$ явно достаточно груба; так, например, она дает

$$k(33,32) \leqslant 1+32=33,$$

ибо

$$\frac{33}{32}=1+\frac{1}{32},$$

в то время как мы знаем, что

$$k(33,32) \leqslant 9.$$

Совсем по-другому ставится задача в двух связанных с этой проблематикой статьях английских математиков Дж. Г. Конуэя [28] и Г. Б. Траструма [29]; эти статьи носят одно и то же название «Стеганое одеяло мистера Перкинса». Здесь решается вопрос об оценке такого наименьшего возможного числа $f(n)$, что квадрат с целочисленной стороной n можно разбить на $f(n)$ квадратов с целочисленными (быть может повторяющимися!) и

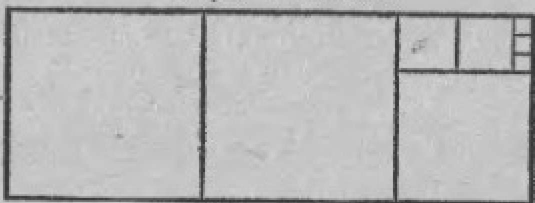


Рис. 64.

попарно взаимно простыми длинами сторон (разумеется, последнее условие касается лишь разных квадратов!). В статьях [28] и [29] доказано, что

$$\log_2 n \leqslant f(n) \leqslant 6\log_2(3n-1)-10 \qquad (<6\log_2 n).$$

См. также задачи II и III на стр. 106.

Задача 15. Составьте таблицу значений функции $k(m, n)$, отвечающую всем целым положительным значениям $m, n \leqslant 6$.

З а д а ч а 16. Докажите выписанное на стр. 85 равенство (***) и выведите из него соотношение (2).

4. Как разрезать поверхности цилиндра и конуса? Склеив между собой две противоположные стороны прямоугольника, мы получим боковую поверхность прямого кругового цилиндра (рис. 65). Поэтому любое решение задачи о разрезании прямоугольника на попарно неравные квадраты одновременно дает рецепт разрезания на квадраты поверхности некоторого цилиндра.

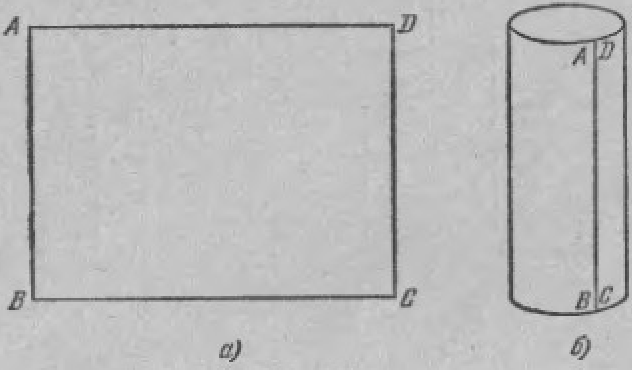


Рис. 65.

Однако существуют и такие способы разбиения поверхности цилиндра на попарно различные квадраты, которые не порождаются никаким разбиением на квадраты прямоугольника. Так, например, на рис. 66, *а* (заимствованном из посвященной рассматриваемой здесь проблематике статьи американского математика М. Гольдберга [22]) изображено разбиение на 10 неповторяющихся квадратов невыпуклого восьмиугольника $ABCDEFGH$, все углы которого равны 90° или 270°. Склеив между собой ломаные $ABCD$ и $HGFE$, мы получим поверхность цилиндра, разбитую на 10 квадратов (рис. 66, *б*).

Аналогично этому, склеив между собой две соседние стороны какого-либо квадрата, мы получим часть боковой поверхности конуса (рис. 67). Поэтому любое разбиение квадрата на меньшие квадраты можно одновременно рассматривать как разбиение на квадраты некоторой части поверхности конуса. Однако можно указать и разбиение части поверхности конуса на квадраты, не порождаемое никаким разбиением квадрата. Например, на рис. 68, *а* изображено разбиение на 9 неповторяющихся квадратов невы-

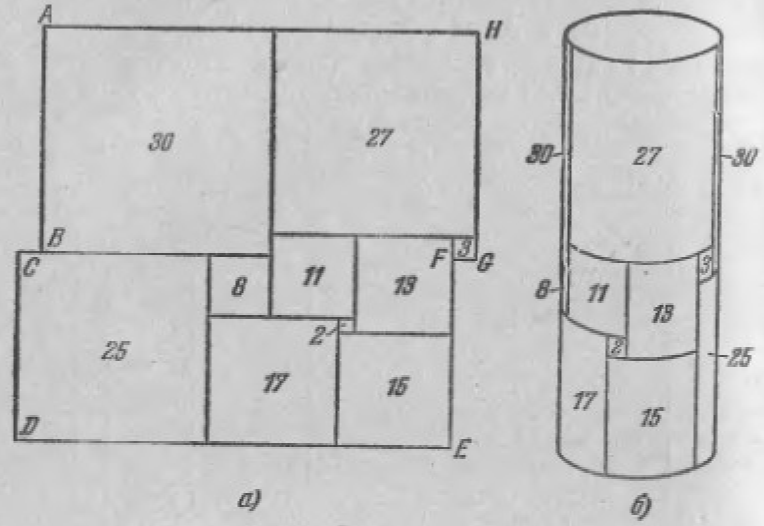


Рис. 66.

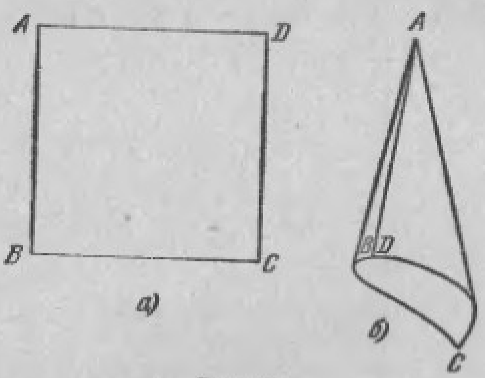


Рис. 67.

пуклого восьмиугольника $ABCDEFGH$, а на рис. 68, *б* — разбиение на 9 квадратов части поверхности конуса, получаемой из этого восьмиугольника склеиванием ломаных $ABCD$ и $AHGF$.

О дальнейших относящихся сюда вопросах см. статью [22] (см. также задачи IV и V на стр. 107).

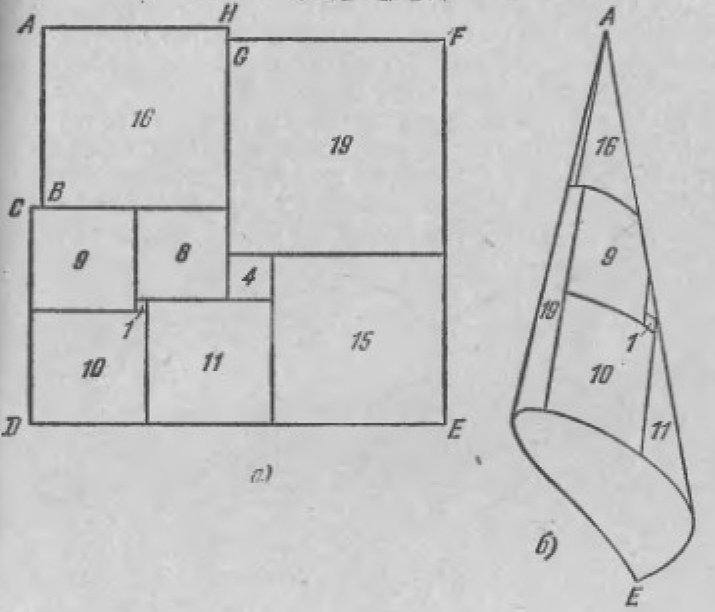


Рис. 68.

5. **Как разрезать треугольник?** Можно обобщить постановку задач, рассматриваемых в настоящей книге, пытаясь складывать выпуклые многоугольники не из квадратов, а из правильных m-угольников, где $m \neq 4$. Однако легко видеть, что *при $m > 4$ никакого выпуклого многоугольника M из $n > 1$ правильных m-угольников* (хотя бы и не попарно различных!) *составить нельзя.* В самом деле, пусть, например, многоугольник M составлен из нескольких правильных п я т и у г о л ь н и к о в. Так как угол α правильного пятиугольника равен $\frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ$ и, следовательно, $2\alpha = 216^\circ > 180^\circ$, то в одной в е р ш и н е выпуклого многоугольника M не могут сходиться два пятиугольника. Но и к одной стороне многоугольника M не могут примыкать два пятиугольника L_1 и L_2, ибо сумма углов многоугольников L_1 и L_2 при их общей вершине A будет также равна $2\alpha = 216^\circ > 180^\circ$, что невозможно. Значит, все сторо-

ны многоугольника M суть стороны одного и того же пятиугольника — и весь многоугольник M сводится к этому единственному пятиугольнику. Аналогично показывается, что из нескольких (больше одного!) правильных m-угольников, где $m>5$, тем более нельзя сложить никакого выпуклого многоугольника [1]).

Выясним теперь, будет ли содержательной задача о разбиении выпуклых многоугольников на правильные т р е у г о л ь н и к и. А именно, докажем, что *ни из какого большего* 1 *числа п о п а р н о р а з л и ч н ы х правильных треугольников составить выпуклый многоугольник* M *нельзя*.

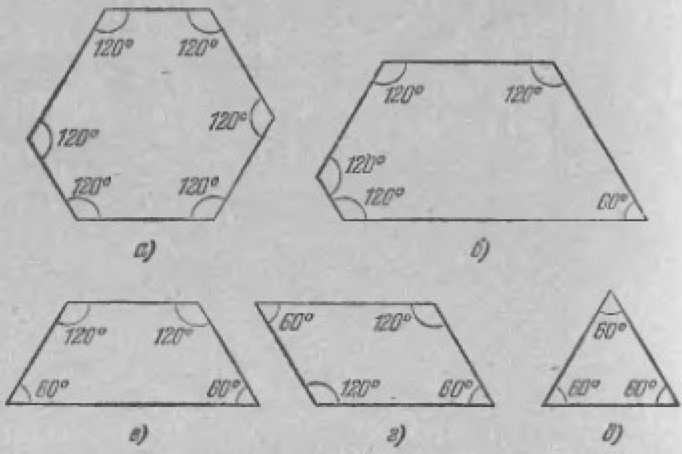


Рис. 69.

В самом деле, пусть выпуклый многоугольник M составлен из конечного числа попарно различных правильных треугольников $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$. Тогда стороны любых двух из этих треугольников будут параллельны (ср. со сказанным на стр. 9 введения). Далее ясно, что каждый угол выпуклого многоугольника M составляет целое кратное 60° и, следовательно, равен либо 60°, либо 120°; поэтому каждый внешний угол многоугольника M равен либо 120°, либо 60°. А так как *сумма всех внешних углов выпуклого*

[1]) Ибо при любом $m>4$ сумма двух углов правильного m-угольника

$$2\cdot\frac{180^\circ(m-2)}{m}=360^\circ-180^\circ\,\frac{4}{m}>180^\circ.$$

многоугольника всегда *равна* 360°, то многоугольник M имеет н е б о л е е ш е с т и у г л о в и представляет собой либо шестиугольник, все углы которого равны 120° (т. е. все внешние углы равны 60°; см. рис. 69, *а*), либо пятиугольник, один угол которого равен 60°, а остальные — 120° (рис. 69, *б*), либо равнобочную трапецию с острым углом в 60° (рис. 69, *в*), либо параллелограмм с острым углом в 60° (рис. 69, *г*), либо, наконец, правильный треугольник (рис. 69, *д*).

Назовем теперь *рвом* всякую трехзвенную ломаную $ABCD$ (см., например, рис. 70), удовлетворяющую условиям:

а) A, B, C и D — вершины правильных треугольников, на которые разбит многоугольник M, а отрезки AB, BC и

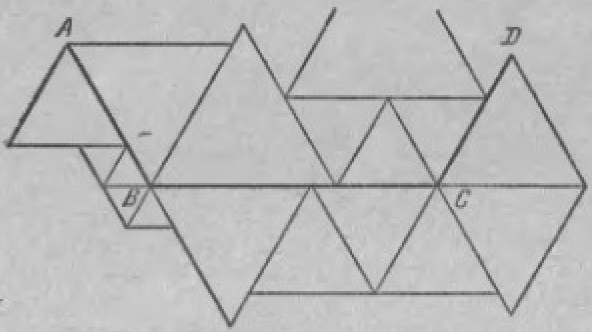


Рис. 70.

CD целиком состоят из сторон таких треугольников (каждый отрезок может состоять из нескольких сторон разных треугольников);

б) точки A и D лежат по одну сторону прямой BC;

в) $\angle ABC = \angle BCD = 120°$.

Отрезок BC мы назовем *дном* рва $ABCD$.

Заметим прежде всего, что *по крайней мере один ров обязательно существует*. Это совершенно очевидно, если многоугольник M имеет вид одной из фигур, изображенных на рис. 69, *а—в*, где этот ров образуют уже некоторые три последовательные стороны разбиваемого многоугольника M. Далее, если многоугольник M — параллелограмм $ABCD$ с острыми углами A и C, равными 60°, и треугольник AEF, заполняющий угол A, меньше (не равного ему по условию!) треугольника, заполняющего угол C, то точки E и F

заведомо не совпадают с вершинами параллелограмма и следовательно, ломаная $BEFD$ — ров (рис. 71, *а*). Наконец, если M — правильный треугольник ABC, то треугольник AEF, заполняющий угол A, не может совпадать с M, и потому ломаная $BEFC$— ров (рис. 71, *б*).

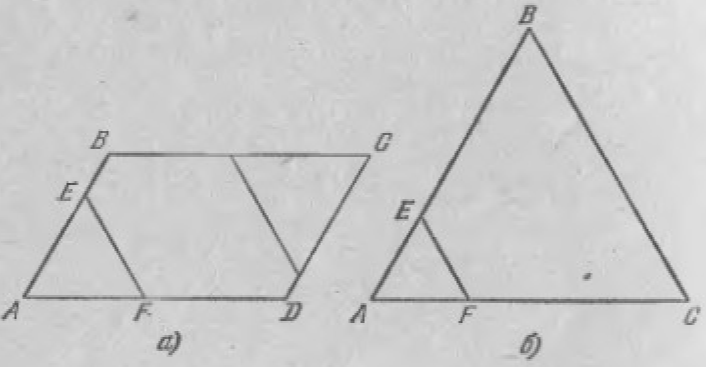


Рис. 71.

Пусть теперь $ABCD$ — ров с наименьшей длиной дна BC (или один из таких рвов); другими словами, мы будем считать, что *наше разбиение многоугольника M на правильные треугольники не содержит рва, дно которого короче BC*. Установим теперь, что *среди треугольников разбиения обязательно найдутся два равных*; это утверждение, очевидно, равносильно тому, которое нам требуется доказать. Ясно, что дно BC рва $ABCD$ должно являться стороной одного треугольника, лежащего внутри рва (т. е. с

Рис. 72.

той же стороны от прямой BC, что и точки A и D),— ведь если бы часть BE отрезка BC являлась стороной треугольника BEF, лежащего внутри рва (рис. 72), то ломаная $FECD$ была бы рвом с дном EC, меньшим BC. Таким образом, мы приходим к рис. 73, где углы MBE и ECN заполнены некоторыми треугольниками T_1 и T_2. Ни один из этих треугольников не может превосходить по величине треугольника $T \equiv BCE$, так как если, например, T_1 больше T, то, очевидно, T_2 меньше T (рис. 74), и $KELD$ — ров с дном EL, меньшим

$EC=BC$. Поэтому считаем, что оба треугольника T_1 и T_2 меньше T (ибо если один из них равен T, то доказывать нечего), откуда вытекает, что по направлениям EX и EX' (рис. 73) вообще не могут идти стороны треугольников разбиения, так как в противном случае опять образовался бы ров с дном, меньшим BC (ср. рис. 74). А так как стороны треугольников, сходящихся в одной вершине, могут, очевидно, образовывать лишь углы, кратные 60°, то через точку E должен проходить отрезок, параллельный BC. Кроме того, отрезок EK стороны BE (а также и отрезок EL стороны CE) должен принадлежать одному треугольнику, так как если бы отрезок $EK_1<EK$ являлся бы стороной треугольника EK_1P, где $EP\|BC$ (рис. 75), то мы получили бы ров AKK_1P с дном KK_1, составляющим часть $BE=BC$ (соответственно ров с дном, составляющим часть

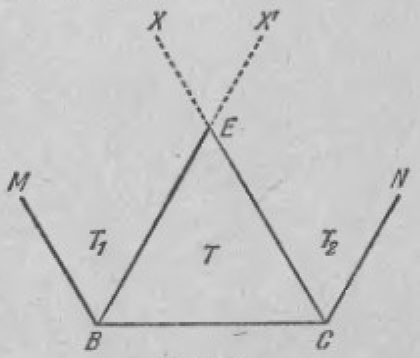


Рис. 73.

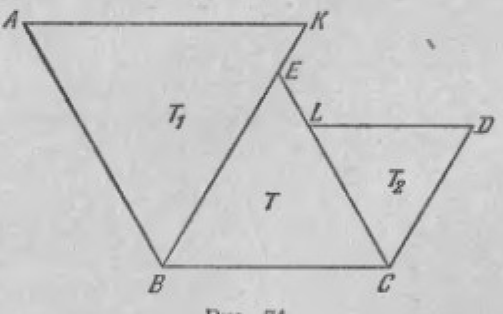


Рис. 74.

$CE=BC$), т. е. с дном, меньшим BC. Таким образом, мы приходим к тому расположению треугольников разбиения, которое изображено на рис. 76.

Далее, через точку A по направлениям AY и AY' (рис. 76) стороны треугольников идти не могут, так как в противном случае образовался бы ров $YAKE$ или $Y'ABC$

соответственно с дном AK или AB, меньшим, чем BC. Так как A не может быть вершиной многоугольника M (ибо иначе, в силу выпуклости M, весь многоугольник M должен был бы располагаться по одну сторону от прямой AK, что противоречит рис. 76), то сторона некоторого треугольника

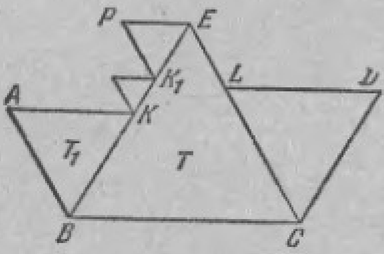


Рис. 75.

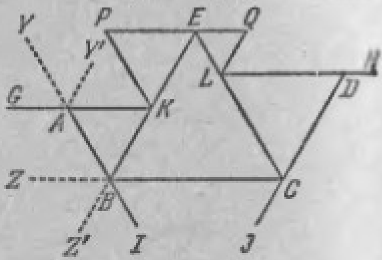


Рис. 76.

должна идти по направлению AG. Аналогично, сторона треугольника должна идти по направлению DH (рис. 76). Отсюда в силу выпуклости многоугольника M следует, что точки B и C не могут быть вершинами этого многоугольника. Поэтому через точки B и C должны проходить какие-то стороны треугольников разбиения, отличные от сторон рва $ABCD$. Но по направлениям BZ и BZ' (рис. 76) стороны треугольников идти не могут, так как при этом образовался бы ров $ZBKP$ или ров $Z'BAG$ с дном, меньшим BC. Следовательно, сторона некоторого треугольника разбиения должна идти по направлению BI (рис. 76). Аналогично устанавливается, что сторона некоторого треугольника разбиения идет и по направлению CJ. Отсюда вытекает, что к а ж д а я из сторон треугольника BCE является дном некоторого рва: сторона BC является дном рва $ABCD$, сторона BE — дном рва $IBEQ$ и сторона CE — дном рва $JCEP$. Все эти три рва имеют одну и ту же (минимальную для всех рвов!) длину дна и, следовательно, все сказанное выше о первом из них сохраняет силу и для рвов $IBEQ$ и

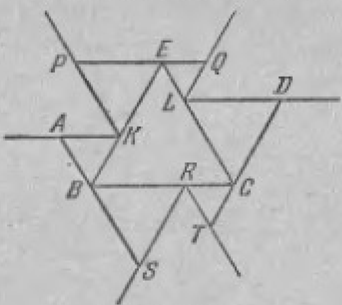


Рис. 77.

$JCEP$. Таким образом, мы приходим к изображенному на рис. 77 расположению треугольников разбиения, причем по направлениям, отмеченным на рис. 77 тонкими линиями, также должны идти стороны треугольников, и поэтому каждый из отрезков PQ, AS и DT служит дном некоторого рва.

Обозначим теперь сторону треугольника BCE (дно рва $ABCD$) через a и найдем сумму длин трех только что названных отрезков:

$$PQ+AS+DT=PE+EQ+AB+BS+DC+CT=$$
$$=EK+EL+BK+BR+CL+CR=$$
$$=(EK+BK)+(EL+CL)+(BR+CR)=BE+CE+BC=3a.$$

Но так как a — дно наименьшего (по длине дна) рва, то $PQ \geqslant a$, $AS \geqslant a$ и $DT \geqslant a$, т. е.

$$PQ=AS=DT=a.$$

А теперь из равенств

$$PE+EQ=a=EK+KB \quad \text{и} \quad PE=EK$$

мы без труда выводим, что

$$EQ=KB,$$

т. е. что *треугольники EQL и AKB равны*[1]) вопреки нашему предположению о том, что все треугольники разбиения попарно различны.

Полученное противоречие и доказывает, что *никакой выпуклый многоугольник M нельзя разрезать на неповторяющиеся правильные треугольники*.

Таким образом, содержательной теории разбиений выпуклого многоугольника (в частности, правильного треугольника) на попарно различные правильные треугольники, подобной развитой в §§ 1—3 теории разрезаний прямоугольника (квадрата) на неповторяющиеся квадраты, мы не получаем (см., впрочем, ниже задачи 17 и 18, а также задачи VII—X на стр. 108).

Задача 17. а) Сопоставьте каждому разбиению правильного треугольника на более мелкие (но, разумеется, не обязательно попарно различные) правильные треугольники определенную электрическую цепь, отдельные проводники которой отвечают треугольникам разбиения (ср. § 2, стр. 42—43).

---

[1]) Более того, из равенств $PQ=AS=DT=a$ нетрудно вывести, что $\triangle ABK=\triangle RCT=\triangle EQL$ и $\triangle CDL=\triangle EPK=\triangle BRS$.

б) Разработайте «принцип тройственности», позволяющий сопоставлять каждой из электрических цепей задачи а) две другие цепи, состоящие из того же числа проводников.

в) Приведите примеры цепей, иллюстрирующих результат задачи а), и преобразований этих цепей, иллюстрирующих результат задачи б).

Задача 18. а) Приведите пример разбиения выпуклого многоугольника на попарно неравные правильные треугольники и правильные шестиугольники.

б) Можно ли разбить правильный треугольник на попарно неравные правильные треугольники и правильные шестиугольники?

6. Как разрезать куб? Естественным стереометрическим аналогом основной задачи этой книги является следующий вопрос: *как разбить прямоугольный параллелепипед* П (*в частности, куб*) [1] *на попарно различные кубы?* Однако, подобно результатам предшествующего пункта, можно установить, что и этот вопрос является бессодержательным: *никакой прямоугольный параллелепипед нельзя разбить на попарно неравные кубы.*

В самом деле, пусть некоторый прямоугольный параллелепипед П сложен из попарно различных неперекрывающихся кубов $К_1$, $К_2$,..., $К_n$, грани которых, очевидно, параллельны граням параллелепипеда П. Обозначим через $К_1$ наименьший из кубов, примыкающих к определенной грани Г параллелепипеда П. Основания кубов, примыкающих к грани Г, суть неперекрывающиеся попарно неравные квадраты, из которых составлен прямоугольник Г. Среди них основание куба $К_1$ есть наименьший квадрат и потому не примыкает к границе прямоугольника Г (см. выше, стр. 12—14, в частности рис. 3, *а*, *б*). Поскольку все кубы, примыкающие к грани Г, по условию превосходят куб $К_1$, над $К_1$ образуется объемный «колодец» с основанием $Г_1$ — гранью куба $К_1$ (рис. 78).

Рассмотрим теперь все кубы, примыкающие к $Г_1$; обозначим через $К_2$ наименьший из них. Основания этих кубов суть попарно неравные неперекрывающиеся квадраты, составляющие прямоугольник (даже квадрат) $Г_1$. Поскольку грань куба $К_2$ является наименьшим из этих квадратов, она не примыкает к границе квадрата $Г_1$. Следовательно, все соседние с $К_2$ кубы, примыкающие к $Г_1$ (поскольку все они больше $К_2$), в свою очередь образуют

[1] Нетрудно понять, что *никакой выпуклый многогранник, отличный от прямоугольного параллелепипеда, нельзя разбить на прямоугольные параллелепипеды* (ср. выше, стр. 9—10).

объемный «колодец» с основанием $Г_2$ — гранью куба $К_2$. Продолжая этот процесс далее и замечая, что всякий раз наименьший из кубов, покрывающих основание очередного колодца, не примыкает к границе этого колодца, мы выделим бесконечную последовательность уменьшающихся кубов $К_1, К_2, \ldots К_N, \ldots$, что противоречит предположению о конечности числа кубов.

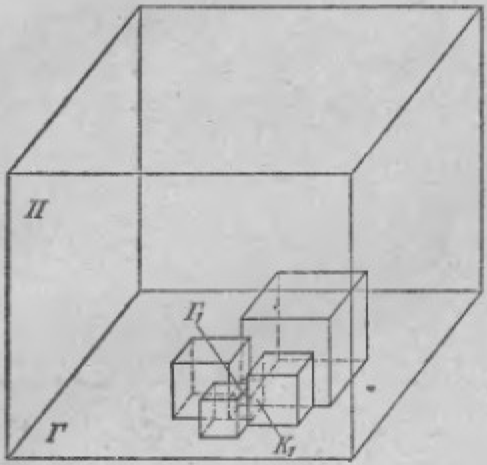


Рис. 78.

Теперь уже совсем легко установить, что вообще *никакой выпуклый многогранник не может быть разбит на попарно различные правильные многогранники одного вида* (т. е. на кубы, или на правильные тетраэдры, или на правильные октаэдры, или на правильные додекаэдры, или на правильные икосаэдры). Для случая кубов это было доказано выше; остается рассмотреть случаи остальных четырех видов правильных многогранников. Пусть, например, выпуклый многогранник Т сложен без пробелов и двойных покрытий из неповторяющихся правильных тетраэдров $Т_1, Т_2 \ldots, Т_n$. Тогда каждая грань многогранника Т будет без пропусков и двойных покрытий сложена из граней тетраэдров разбиения. Но поскольку грани выпуклого многогранника суть выпуклые многоугольники, каждая грань многогранника Т должна быть заполнена одной гранью одного из тетраэдров разбиения — ведь мы знаем, что никакой выпуклый многоугольник не может быть составлен из нескольких попарно неравных правильных треугольников (см. п. 5 этого параграфа). Таким образом, все грани многогранника T должны быть правильными треугольниками. Если две грани многогранника T смежны, то у них имеется общее ребро, и, следовательно, соответствующие треугольники, а вместе с тем и соответствующие тетраэдры, равны. Поскольку, однако, все тетраэдры разбиения попарно различны, смежные грани многогранника T должны служить гранями одного тетраэдра разбиения. Поэтому все грани T суть грани одного и того же тетраэдра разбиения и весь многогранник T сводится к этому тетраэдру. Совершенно аналогично доказывается, что никакой выпуклый многогранник не может быть разбит на несколько (больше одного!) попарно неравных правильных октаэдров или правильных икосаэдров.

Пусть, наконец, выпуклый многогранник Δ сложен из конечного числа попарно различных правильных додекаэдров $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Каждая из граней многогранника Δ есть выпуклый многоугольник, составленный из граней додекаэдров разбиения. Так как из правильных пятиугольников, как мы знаем, нельзя составить никакого выпуклого многоугольника (см. выше стр. 90), то каждая из граней многогранника Δ должна состоять из одной грани додекаэдра. Но тогда по-прежнему, поскольку смежные грани многогранника Δ имеют общее ребро, эти грани многогранника Δ будут обязательно принадлежать одному и тому же додекаэдру (так как все додекаэдры разбиения, по условию, попарно различны); поэтому все грани многогранника Δ суть грани одного додекаэдра, и следовательно, весь многогранник сводится к правильному додекаэдру.

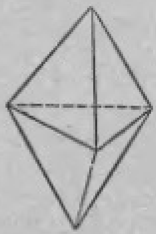


Рис. 79.

Более того, можно доказать, что *единственным выпуклым многогранником, который можно сложить из некоторого* (большего 1) *числа не обязательно попарно различных правильных тетраэдров, является бипирамида* (рис. 79), *образованная двумя равными правильными тетраэдрами, приложенными по основаниям, и что ни из какого* (большего 1) *числа правильных октаэдров, хотя бы и не попарно различных, нельзя сложить выпуклый многогранник.*

В самом деле, предположим, что из некоторого числа правильных тетраэдров $T_1, T_2, \ldots, T_n$ сложен какой-то многогранник T. Заметим прежде всего, что *двугранный угол* φ *правильного тетраэдра не укладывается целое число раз ни в* 180°, *ни в* 360°. Действительно, рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$ (рис. 80). Опустим из вершин A и B перпендикуляры AM и BM на ребро CD; основанием этих перпендикуляров, являющихся высотами граней ACD и BCD, будет точка M — середина ребра CD. Угол $AMB=\varphi$ — линейный угол двугранного угла $ACDB$. Обозначим ребро AB правильного тетраэдра через a. Из равнобедренного треугольника AMB с боковыми сторонами $AM=BM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (это суть высоты равносторонних треугольников

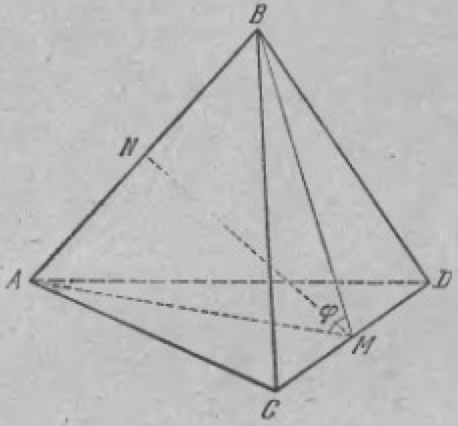


Рис. 80

со стороной a), основанием $AB=a$ и высотой MN (где N — середина ребра AB) получаем

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{AN}{AM}=\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

откуда следует, что

$$\cos\varphi=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Так как $\cos\varphi=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, то $60^\circ<\varphi<90^\circ$, откуда $3\varphi>180^\circ$ и $2\varphi<180^\circ$, т. е. φ не содержится целое число раз в 180°. Аналогично, $6\varphi>360^\circ$ и $4\varphi<360^\circ$, так что нам остается показать, что $5\varphi\neq360^\circ$, т. е. что $\varphi\neq\frac{360^\circ}{5}$. Но если бы было $\varphi=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$, то мы имели бы

$$\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi=\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\frac{\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\sin 72^\circ\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{1}{4}\,\frac{\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{1}{4},$$

ибо $\sin 144° = \sin (180° - 36°) = \sin 36°$. А так как, на самом деле,

$$\cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi = \sqrt{1-\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cos \varphi =$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{6}}{9} \neq \frac{1}{4},$$

то, очевидно, $\varphi \neq 72°$.

Рассмотрим один из тетраэдров, образующих многогранник Т. Так как мы заранее исключаем случай, когда тело состоит только из о д н о г о тетраэдра, то найдется еще один тетраэдр, грань Γ_1 которого

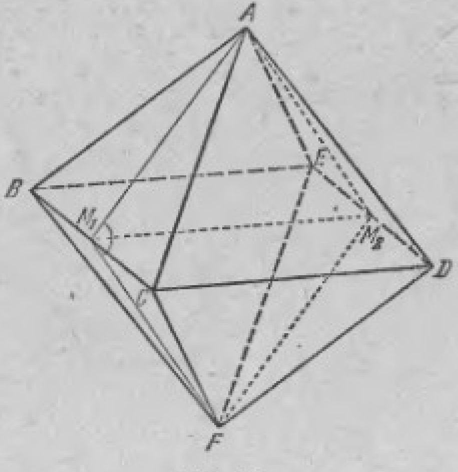


Рис. 81.

примыкает к некоторой грани Г первого тетраэдра. При этом либо грани Γ_1 и Г совпадают, либо у одного из тетраэдров найдется ребро, которое полностью или частично лежит в грани другого тетраэдра, т. е. такое ребро, при котором образуется двугранный угол $\psi = 180° - \varphi$.

Покажем, что второй случай невозможен. Очевидно, что двугранный угол ψ не может быть заполнен тетраэдрами, примыкающими к ребру только вершинами (ибо всего у нас имеется конечное число тетраэдров). Но его нельзя заполнить и k тетраэдрами, для которых это ребро является общим, так как в этом случае было бы $k\varphi = 180° - \varphi$ или $(k+1)\varphi = 180°$, что невозможно. Таким образом, *если* T_1 *и* T_2 — *два смежных тетраэдра, входящих в состав выпуклого многогранника* Т, *то грани, по которым соприкасаются эти тетраэдры, целиком совпадают.* Отметим еще, что б о л е е ч е м д в а тетраэдра разбиения не могут сходиться в одном ребре. Действительно, $l\varphi > 180°$ при целом $l>2$, а поэтому угол $l\varphi$ не может служить двугранным углом выпуклого многогранника Т; кроме того, и внутри Т в одном ребре не могут сходиться $l>2$ тетраэдров, так как равенство $360° = l\varphi$ при целом l невозможно.

Если бы наше тело не сводилось к бипирамиде, то к одному из двух наших тетраэдров, например к первому, примыкал бы по целой грани третий. Но тогда нашлось бы ребро, общее сразу для трех тетраэдров, а это, как мы показали только что, невозможно. Итак, 2 есть наибольшее число правильных тетраэдров, из которых можно сложить выпуклое тело (из двух тетраэдров можно сложить только бипирамиду, изображенную на рис. 79).

Перейдем теперь к случаю многогранника Δ, сложенного из правильных о к т а э д р о в. Определим прежде всего двугранный угол октаэдра. Пусть $ABCDEF$ — правильный октаэдр и $BCDE$ — квадрат, образованный его ребрами (рис. 81). Проведем высоты AM_1, AM_2,

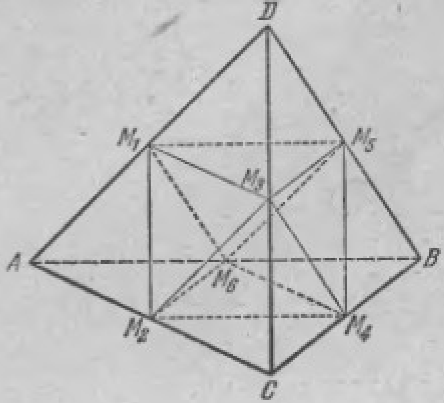


Рис. 82.

FM_1, FM_2 треугольников ABC, ADE, FBC и FDE; их основаниями будут середины M_1 и M_2 ребер BC и DE. Легко видеть, что все четыре высоты будут лежать в одной плоскости, которая проходит через среднюю линию M_1M_2 квадрата $BCDE$ и перпендикулярна к плоскости этого квадрата. Пусть ребро октаэдра равно a; тогда в треугольнике M_1AM_2 стороны AM_1 и AM_2 являются высотами правильных треугольников со стороной a, а сторона M_1M_2 равна a. Отсюда следует, что $\angle M_1AM_2$ равен углу φ — *двугранному углу правильного тетраэдра* (ср. $\triangle AM_1M_2$ на рис. 81 и $\triangle ABM$ на рис. 80). Далее, в плоском четырехугольнике AM_1FM_2 все стороны равны; значит, этот четырехугольник — ромб. Поэтому двугранный угол октаэдра $\psi = \angle AM_1F = 180^\circ - \varphi$. Из неравенств для φ получаем, что $90^\circ < \psi < 120^\circ$. Таким образом,

$$\psi < 180^\circ < 2\psi < 270^\circ < 3\psi < 360^\circ < 4\psi,$$

т. е. *угол ψ не укладывается целое число раз ни в 180°, ни в 360°.*

Из доказанного следует, что *весь выпуклый многогранник Δ сводится к единственному правильному октаэдру.* Действительно, предположим, что два октаэдра соприкасаются друг с другом по некоторым граням; тогда (так же как и в случае выпуклого многогранника, сложенного из тетраэдров) может быть показано, что эти грани целиком совпадают. Следовательно, существует ребро, в котором встречаются по крайней мере два октаэдра. Однако это ребро не может лежать внутри Δ, так как угол ψ не может уложиться целое число раз в $360°$. Но это ребро не может быть и ребром самого многогранника Δ, так как уже $2\psi > 180°$.

Отметим в заключение, что *из правильных тетраэдров и правильных октаэдров можно сложить выпуклый многогранник* U. Возьмем правильный тетраэдр $ABCD$ (рис. 82). Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 — середины его ребер. Через каждые три из этих шести точек, лежащие на ребрах одного трехгранного угла, проведем по плоскости; очевидно, что эти плоскости будут параллельны плоскостям оснований. Наш тетраэдр распадается на четыре правильных тетраэдра (равных между собой и в два раза меньших исходного) и некоторый октаэдр. Докажем, что *этот октаэдр — правильный*. Действительно, все грани октаэдра — одинаковые правильные треугольники со стороной, вдвое меньшей, чем сторона исходного тетраэдра; все двугранные углы дополняют угол φ правильного тетраэдра до $180°$, т. е. тоже все равны между собой (и равны, как мы видели выше, двугранному углу ψ правильного октаэдра). Таким образом, мы разбили правильный тетраэдр $ABCD$ на четыре правильных тетраэдра и один правильный октаэдр. Обратно, если *мы имеем четыре правильных тетраэдра и правильный октаэдр*, причем *ребра всех наших тел равны* a, *то из них можно сложить правильный тетраэдр со стороной* $2a$.

Задача 19. Докажите, что невозможны никакие «простые» (в смысле п. 1 этого параграфа) разбиения прямоугольного параллелепипеда на (быть может и повторяющиеся) кубы.

Задача 20. Покажите, что все трехмерное пространство можно заполнить правильными тетраэдрами и правильными октаэдрами.

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. а) *Описать множество M, состоящее из таких целых чисел m, что квадрат K можно разбить на m попарно различных квадратов. При этом считается, что каждое число m входит в множество M с такой «кратностью» (т. е. столько раз), сколько имеется различных разбиений квадрата на m попарно неравных квадратов. Для каждого числа m определить его «кратность» в множестве M* (так, известно, что «кратность» числа 28 больше 1,—см. стр. 28).

Эта задача бесспорно является весьма трудной; более простая задача определения наименьшего из всех чисел m также пока не решена, несмотря на многочисленные попытки, предпринимавшиеся математиками разных стран. [Относительно наименьшего числа m_0 из множества M известно лишь, что

$$13 < m_0 \leqslant 24;$$

ср. выше, стр. 29—32.]

б) *Решить аналогичную задачу для простых разбиений квадрата K на попарно неравные квадраты* (см. стр. 68).

Эта задача, вероятно, еще труднее задачи а). Относительно искомого множества N целых чисел n известно лишь, что наименьшее из этих чисел — обозначим его через n_0 — удовлетворяет неравенствам

$$13 < n_0 \leqslant 38$$

(ср. выше, стр. 71). Также известно, что «кратность» числа 55, принадлежащего множеству N, больше 1 (см. стр. 71).

в) *Решить ту же задачу для простых разбиений квадрата K на квадраты, не обязательно неповторяющиеся.*

Известно, что соответствующее множество P целых чисел p начинается с числа $p_0 = 13$ (см. стр. 69—70); однако полная характеристика этого множества представляет, вероятно, значительные трудности.

г) *Та же задача, но уже о к а к и х у г о д н о разбиениях квадрата К на меньшие квадраты.*

Описание соответствующего множества Q целых чисел q не представляет труда — исходя из изображенных на рис. 1, *а—г* примеров нетрудно убедиться, что *квадрат можно разбить на любое целое положительное число* $q \neq 2, 3, 5$ *квадратов.* Однако задача нахождения (или даже оценки) «кратностей» отдельных чисел этого множества, видимо, достаточно сложна.

З а д а ч а II. *Та же задача, что и выше* (точнее, те же четыре задачи а)—г)), *но с заменой квадрата К на прямоугольник* $L(a, b)$ *с целочисленными и взаимно простыми длинами сторон* a *и* b.

Разумеется, эта задача, являющаяся обобщением задачи I, заметно труднее ее. Так, например, здесь представляются достаточно безнадежными даже попытки точного (в зависимости от a и b) определения наименьших чисел m_0, n_0, p_0 и q_0 из множеств чисел M, N, P и Q, определяемых как в задаче I с заменой квадрата K прямоугольником $L(a,b)$ (может быть, несколько легче других задача определения числа q_0). Кажется, пока не доказано даже, что для любой пары взаимно простых целых положительных чисел a и b соответствующие множества N и P (второе из которых полностью содержит первое) обязательно н е п у с т ы.

З а д а ч а III. а) *Охарактеризовать множество* $\hat{M}$ *таких чисел* $\hat{m}$, *что к а к о й-т о прямоугольник L можно разбить на* $\hat{m}$ *п о п а р н о р а з л и ч н ы х квадратов.*

Рассмотреть аналогичные задачи для случаев:

б) *п р о с т ы х разбиений прямоугольников на п о п а р н о р а з л и ч н ы е квадраты* (обозначим соответствующее множество целых чисел через $\hat{N}$);

в) *п р о с т ы х разбиений прямоугольников на квадраты, хотя бы два из которых равны между собой* (соответствующее множество обозначим через $\hat{R}$);

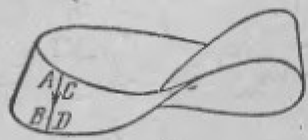
г) *к а к и х у г о д н о разбиений прямоугольников на квадраты* (соответствующее множество целых чисел обозначим через $\hat{Q}$).

Известно, что (без учета «кратности»!) множество $\hat{M}$ состоит из всех целых положительных чисел $\hat{m} \geq 9$ (см. стр. 24—25); множество $\hat{N}$ начинается числами 9, 10, 11, 12, 13 и, видимо, совпадает с множеством $\hat{M}$ (ср. стр. 69); множество $\hat{R}$ начинается с чисел 9, 12, 13 и, вероятно, содержит все целые числа, большие 11 (см. стр. 69); множество $\hat{Q}$, разумеется, состоит из всех целых положительных чисел. Однако вопрос о «кратностях» отдельных элементов этих множеств бесспорно является трудным; здесь, вероятно, нелегко дать даже какие-либо оценки этих кратностей (зависящих от соответствующего числа).

Задача IV. *Задачи, аналогичные задачам* II *и* III, *можно поставить для разбиений на квадраты*

а) *цилиндра, получаемого склеиванием сторон AB и DC прямоугольника $ABCD$;*

а)



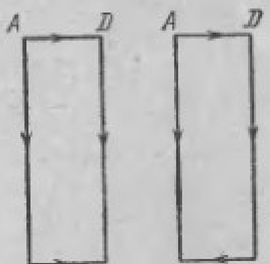
б)

Рис. 83.

б) *«листа Мёбиуса», получаемого из прямоугольника $ABCD$ склеиванием его сторон AB и CD так, что точка A сливается с точкой C, а точка B — с точкой D* (рис. 83);

в) *«тора», получаемого из прямоугольника $ABCD$ склеиванием стороны AB со стороной DC, а стороны AD со стороной BC* (рис. 84,*а*);

г) *«бутылки Клейна», получаемой из прямоугольника $ABCD$ склеиванием стороны AB со стороной DC, а стороны AD со стороной CB так, чтобы точка A слилась с точкой C, а точка B — с точкой D* (рис. 84,*б*).



а) *б)*

Рис. 84

Задача V. *Те же задачи можно поставить для разбиений на квадраты части поверхности конуса;* однако здесь возникает дополнительная сложность, состоящая в требовании *описания всех многоугольных областей на поверхности конуса, для которых такое разбиение возможно.*

Задача VI. *Построить теорию разбиений на квадраты всевозможных (быть может невыпуклых!) многоугольников с углами 90° и 270°* (для этих разбиений можно поставить задачи, аналогичные задачам II и III).

Задача VII. *Охарактеризовать те из изображенных на рис. 69, а—д многоугольников, которые можно резрезать на* (не обязательно попарно различные) *правильные треугольники.*

Вот эта задача, видимо, является довольно несложной!

Задача VIII. *Решить задачи, аналогичные задачам* II в)—г) и III в)—г), *для разбиения многоугольников, изображенных на рис. 69, а—д, на правильные треугольники* (таким образом, в задачах, аналогичных задачам II в)—г), речь идет о разбиении одного определенного многоугольника, а в задачах, аналогичных задачам III в)—г),—о разбиениях всевозможных таких многоугольников).

Разумеется, здесь имеет смысл отдельно рассмотреть тот случай, когда разбиваемый многоугольник сам является правильным треугольником (аналог задач I в)—г)).

Задача IX. а) *Разработать теорию разбиений многоугольников, изображенных на рис. 69, а—д, на попарно неравные правильные треугольники и правильные шестиугольники;*

б) *разработать теорию* ***простых*** *разбиений этих многоугольников на правильные треугольники и правильные шестиугольники.*

Задача X. а) *Разработать теорию разбиений треугольника T с углами α, β и γ на попарно неравные треугольники, подобные T;*

б) *разработать теорию* ***простых*** *разбиений этого треугольника на подобные ему треугольники.*

Здесь тоже, разумеется, могут быть поставлены вопросы, родственные тем, которые составляют содержание задач I а)—г). Имеет также смысл задача о создании теории, охватывающей вопросы, связанные с разбиением любых выпуклых (или даже и не обязательно выпуклых) многоугольников на треугольники, подобные треугольнику T.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ден М. (Dehn M.), О разложении прямоугольников на прямоугольники (Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke), Math. Annalen 57 (1903), 314—332.

[2] Морон З. (Morón Z.), Przeglądzie Matematyczno-Fizycznum 3 (1925), 152—153.

[3] Крайчик М. (Kraitschik M.), Математика игр или математические развлечения (La mathématique des jeux ou récréations mathématiques), Bruxelles, 1930.

[4] Абе М. (Abe M.), О задаче покрытия без просветов и двойных покрытий внутренности квадрата конечным числом попарно различных квадратов (On the problem to cover simply and without gap the inside of a square with a finite number of squares which are all different from one another), Proceed. of Phys.-Math. Society Japan (3) 14 (1932), 385—387.

[5] Яремкевич (Jaremkiewycz), Задача 1242, Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht 66 (1935), 251; Яремкевич, Маренгольц, Шпраг Р. (Mahrenholz, Sprague R.), Решение задачи 1242, там же, 68 (1937), 43.

[6] Штейнгауз Г. (Steinhaus H.), Математический калейдоскоп (Kalejdoskop matematyczny), Lwów—Warszawa, 1938; русский перевод— Гостехиздат, 1949; 2-е изд. — Warszawa, 1954.

[7] Чоула С. (Chowla S.), Деление прямоугольника на неравные квадраты (The division of a rectangle into unequal squares), Math. Student 7 (1939), 69—70.

[8] Штёр А. (Stöhr A.), О разложениях прямоугольников на неравные квадраты (Über Zerlegungen von Rechtecken in inkongruente Quadrate), Schriften des Math. Institut und des Institut für angew. Math. der Universität Berlin 4 (1939), 314—332.

[9] Шпраг Р., Пример разложения квадрата на попарно различные квадраты (Beispiel einer Zerlegung eines Quadrates in lauter verschiedene Quadrate), Math. Zeitschrift 45 (1939), 607—608.

10] Тёпфкен Г. (Toepfken H.), Задача 271, Jahresbericht der Deutsche Math. Vereinigung 47 (1937), *2* ¹); Тёпфкен Г., Рейхардт Г. (Reichardt H.), Решение задачи 271, там же, 50 (1940), *13—14* ¹).

[11] Стоп А. Г. (Stone A. H.), Задача E 401, American Math. Monthly 47 (1940), 48; Гольдберг М., Татти У. Т. (Goldberg M., Tutte W. T.), Решение задачи E 401, там же, 570—572.

[12] Шпраг Р., О разложении прямоугольников на попарно различные квадраты (Über die Zerlegung von Rechtecken in lauter verschiedene Quadrate), Journal für reine und angewandte Math. 182 (1940), 60—64.

[13] Брукс Р. Л., Смит К. А. Б., Стон А. Г., Татти У. Т. (Brooks R. L., Smith C. A. B.), Разбиение прямоугольников на квадраты (The dissertion of rectangles into squares), Duke Journal of Math. 7 (1940), 312—340.

[14] Шпраг Р., К оценке наименьшего числа неравных квадратов, заполняющих заданный прямоугольник (Zur Abschätzung der Mindestzahl inkongruente Quadrate, die ein gegebenes Rechtecke ausfüllen), Math. Zeitschrift 46 (1940), 460—471.

[15] Баукамп К. Я. (Bouwkamp C. J.), О разбиении прямоугольников на квадраты, I—III (On the dissection of rectangles into squares, I—III), Proceedings of the koninklijke Nederlandsche Akad. van Wetenschappen 49 (1946), 1176—1188; 50 (1947), 58—71; там же, 72—78.

[16] Баукамп К. Я., О построении квадратов, квадрированных просто и совершенно (On the construction on simple perfect squared squares), Proceedings of the koninklijke Nederlandsche Akad. van Wetenschappen 50 (1947), 1296—1299.

[17] Брукс Р. Л., Смит К. А. Б., Стон А. Г., Татти У. Т., Простой совершенный квадрат (A simple perfect square), Proceedings of the koninklijke Nederlandsche Akad. van Wetenschappen 50 (1947), 1300—1301.

[18] Вилькокс Ф. Г. А. (Willcocks T. H. A.), Fairly Chess Review, August 1948.

[19] Смит К. А. Б., Татти У. Т., Класс самодвойственных карт (A classe of Self-Dual Maps), Canadian Journal of Math. 2 (1950), 179—196.

[20] Татти У. Т., Квадрирование квадрата (Squaring of Square), Canadian Journal of Math. 2 (1950), 197—209.

[21] Вилькокс Ф. Г. А., Заметка о некоторых совершенных квадрированиях квадратов (A note of some perfect squared squares), Canadian Journal of Math. 3 (1951), 304—308.

¹) В этом журнале имеется независимая от основной курсивная нумерация страниц.

[22] Гольдберг М., Квадрирование развертывающихся поверхностей (The squaring of developable surfaces), Scripta Math. 18 (1952), 17—24.

[23] Кордемский Б. А., Руслаев Н. В., Удивительный квадрат, Гостехиздат, 1952.

[24] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, Геометрия (стереометрия), Гостехиздат, 1954.

[25] Мешковский Г. (Meschkowski H.), Нерешенные и неразрешимые задачи геометрии (Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie), Braunschweig, 1960.

[26] Безин С. Л. (Basin S. L.), Обобщенные последовательности Фибоначчи и квадрируемые прямоугольники (Generalized Fibonacci sequences and squared rectangles), American Math. Monthly 70 (1963), 372—379.

[27] Безин С. Л., Рекуррентные последовательности и квадрируемые прямоугольники (Recurrent sequences and squared rectangles), Fibonacci Quarterly Journal 1, № 2 (1963).

[28] Конуэй Дж. Г. (Conway J. H.), Стеганое одеяло мистера Перкинса (Mrs Perkins's quilt), Proceedings of the Cambridge Philosofical Societe 60 (1964), 363—368.

[29] Траструм Г. Б. (Trustrum G. B.), Стеганое одеяло мистера Перкинса, Proceedings of the Cambridge Philosofical Societe 61 (1965), 7—11.

[30] Сборник задач московских математических олимпиад (сост. А. А. Леман), «Просвещение,» 1965.

Исаак Моисеевич Яглом

Как разрезать квадрат?

Серия: «Математическая библиотечка»

М., 1968 г., 112 стр. с илл.

Редактор *Ф. И. Кизнер*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректор *М. Л. Липелис*

Сдано в набор 25/II 1968 г. Подписано к печати 17/VI 1968 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 3,5. Условн. печ. л. 5,88. Уч.-изд. л. 5,69. Тираж 125 000 экз. Т-08393. Цена 17 коп. Заказ № 2647.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Отпечатано с матриц в типографии издательства «Коммунист», г. Саратов.